Gyakorlás a 2. zh előtt - Matematika A1a GTK 2024. április

I. Divergens sorozatok

(1) $a_n = \left(\frac{2+3n}{1+n}\right)^n$ „3^∞" típus, $3>1 \Rightarrow a_n$ divergens

Rendőrelv („Rókotróelv")

$$\left(\frac{2+3n}{1+n}\right)^n \geq \left(\frac{3n}{1+n}\right)^n \geq \left(\frac{3\cancel{n}}{2\cancel{n}}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

div. geom. sorozat (mértani)

$\left(\frac{2+3n}{1+n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\left(\frac{3}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

$\Longleftarrow$ Rendőrelv

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}\right)}{n^2+n-(n^2-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}\right)}{n+1} \left(\cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) =$$

$\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$ típus

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}\right)}{1+\frac{1}{n}} = +\infty$$

$\frac{1}{n} \to 0$

$\text{"}\frac{\infty}{1}\text{"}$ típus

(1) Határérték? (L'Hospital nélkül)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2(2x)}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(2x)}{x \cdot \sin(x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin^2(2x)}{(2x)^2} \cdot \underbrace{(2x)^2}_{4x^2} \cdot \frac{x}{\sin(x)} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}_{\downarrow \, 4} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2}_{\downarrow \, 1^2} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\downarrow \, \frac{1}{1}} = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

$x \to 0$

② Szakadási helyek és típusai

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 4x + 3}$

szakadási helyek: $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$

f folytonos $\forall x \in D_f$ pontban

$$f(x) = \frac{x(x^2-2x+1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x\cdot(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x-3)} = \frac{x(x-1)}{x-3}$$

Szakadás típusa:

$x_1 = 3$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x(x-1)}{x-3} = -\infty \quad \text{ill} \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{x(x-1)}{x-3} = +\infty \Rightarrow x_1 = 3\text{-ban pólus}$$

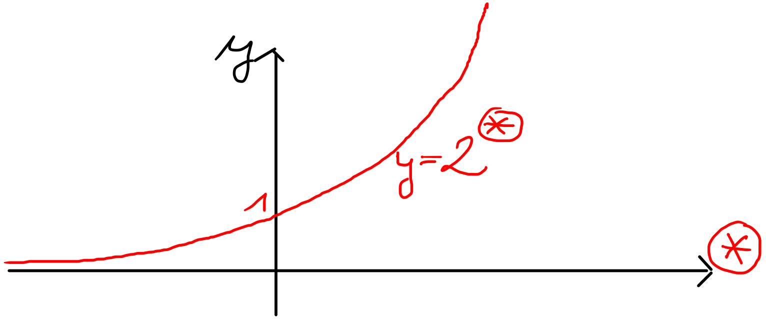
$$\text{„}\frac{6}{0\ominus}\text{"} \qquad \text{„}\frac{6}{0\oplus}\text{"}$$

$x_2 = 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x-3} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{megszüntethető szakadás } x_2\text{-ben}$$

$$\text{„}\frac{0}{-2}\text{"}$$

b) $f(x) = 2^{\frac{3}{1-x}}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



* most $\frac{3}{1-x}$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{3}{1-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 1-} 2^{\frac{3}{1-x}} = \infty$$

$$\text{„}\frac{3}{0\oplus}\text{"} \qquad \text{„}2^{\infty}\text{"}$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{3}{1-x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to 1+} 2^{\frac{3}{1-x}} = 0$$

$$\text{„}\frac{3}{0\ominus}\text{"} \qquad \text{„}2^{-\infty}\text{"}$$

nem nevezetes típus, de az biztos, hogy <u>NEM</u> megszüntethető

III. Derivált kiszámolása, érintőegyenes egyenlete

① $f(x) = \ln\left(tg\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\quad x_0 = 0$ pontban

$$f'(x) = \frac{1}{tg\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot 2x$$

(láncszabály)

$\ln'$ (középső fgv) $\quad tg'$ (belső fgv) $\quad \left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)'$

$$f'(0) = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot 2\cdot 0 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

$$f(0) = \ln\left(tg\,\frac{\pi}{4}\right) = \ln 1 = 0$$

Érintő egyenlete: $\quad y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

$$y = 0\cdot(x-0) + 0$$

$$\boxed{y = 0}$$

(2)

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

$$x_0 := 1$$

$$f'(x) = \frac{0\cdot(x+2) - 1\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}$$ (hányados-szabály)

$$f'(1) = \frac{-1}{9}$$

$$f(1) = \frac{1}{3}$$

Érintőegyenes egyenlete: $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

$$y = \frac{-1}{9}\cdot(x-1) + \frac{1}{3}$$

$$\left(y = \frac{-1}{9}x + \frac{4}{9} \right)$$

(1) $f(x) = 2x + \ln(x^2)$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad$! $x=0$ szakadási hely

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{x} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = -1$$

	$x<-1$	-1	$]-1;0[$	0	$x>0$
f'	$+$	0	$-$		$+$
f	szig. mon. nő $\nearrow$	LOK. MAX.	szig. mon. csökken $\searrow$		szig. mon. nő $\nearrow$

$f(-1) = -2 + 0 = -2$ lok. max. érték

(2) Egy üzemben havi átlagban 2000 db terméket gyártanak, és el is adják. Minden egyes darabon 10.000 Ft (tiszta) hasznuk van. Egy piackutatás azt az eredményt hozta, hogy minden egyes 100 forint árengedmény/db hatására 200-zal több terméket tudnak eladni egy hónapban.
Mennyivel csökkentse a cég a darabárat, hogy a lehető legnagyobb haszna legyen (havi átlagban)? Mekkora lesz így a havi haszon?

Tfh. $100 \cdot x$ forinttal csökkentették a darabárat.

$\left.\begin{array}{l}\text{új darabonkénti haszon: } 10.000-100x \text{ Ft} \\ \text{új havi eladott darabszám: } 2000+200x \text{ db}\end{array}\right\}$ ebből felírjuk a haszonfüggvényt, h(x)-et

$$h(x) = (2000+200x)\cdot(10.000-100x) = 20.000(10+x)(100-x) = 20.000\cdot(-x^2+90x+1000)$$

$$h'(x) = 20.000\cdot(-2x+90) \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow x=45$$

	]0;45[	45	x>45
h'	+	0	−
h	szig.m.nő ↗	LOK MAX	szig.m.csökk ↘

$x = 45 \Rightarrow$ a havi haszon maximális

$$h(45) = 20.000\cdot 55\cdot 55 = 60.500.000 \text{ Ft}$$

V. Konvexitás, inflexió

1

$f(x) = x^2 \cdot e^x \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x$ (szorzat-szabály)

$f''(x) = (2+2x) \cdot e^x + (2x+x^2) \cdot e^x = (x^2+4x+2) \cdot e^x$ (—"—)

$f'(x) = 0 \iff x^2 + 4x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2 \cdot \sqrt{2}}{2}$ < $x_1 = -2-\sqrt{2}$, $x_2 = -2+\sqrt{2}$

	$x < -2-\sqrt{2}$	$-2-\sqrt{2}$	$]-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}[$	$-2+\sqrt{2}$	$x > -2+\sqrt{2}$
f''	+	0	−	0	+
f	konvex	IP	konkáv	IP	konvex