Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H — Vizsga gyakorló feladatsor — F

Kiadva: 2016. május 22.

ELMÉLETI RÉSZ: Lásd a kiadott elméleti kérdéssort.

4.) Milyen $p > 0$ paraméter-értékekre lesz konvergens a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\sqrt{n}}$ numerikus sor?

5. a) Fejtsük Fourier-sorba a $\Phi(x) := |\sin x|$ függvényt!

b.) Állapítsuk meg, hol és hová konvergens a függvény Fourier-sora!

c.) Behelyettesítve az $x = \pi/2$ helyen, adjunk végtelen sor előállítást a π értékének meghatározására.

d.) Mondjunk olyan küszöbszámot, amelyet elérve a tagok összeadásával ebben a sorban, π értékére már legalább 3 tizedesre jó közelítést kapunk!

6.) Hány megoldása van az $\mathbf{y}C = \mathbf{0}$ egyenletnek, ha $C := \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$?

7.) Az $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix sajátértékei $1, 1/2, 1/3, 1/4$, amelyekhez rendre a

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

sajátvektorok tartoznak. Adja meg az A^{-1} mátrixot!

8.) Az $f(x, y) = z = z(x, y)$ függvényt az $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$ függvényegyenlet impliciten határozza meg. Számítsa ki az f függvény gradiensét a $P(0, 1)$ pontban!

9.) Vizsgálja meg, hogy a $k(x, y) := e^x(x + y) - 2x - y$ függvénynek hol vannak szélsőértékei!

10.) Teljes differenciál-e az $(x^2 + \cos y)\, dx + (z^2 - x \sin y)\, dy + 2zydz$ differenciál?

11.) Konvergens-e a $\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ egységkörben a (0-ban nem korlátos integrandussal felírt) $\iint_{\mathcal{D}} \log(x^2 + y^2) dxdy$ improprius integrál? Bizonyítsa be, ha nem, vagy számítsa ki, ha igen!

12.) Egy talpas pohár kelyhe a $z = x^2$ parabola elforgatásával keletkező forgási paraboloid alakját mutatja. A pohárban 4 cm magasságig 1 sűrűségű víz, afelett pedig 9 cm magasságig α sűrűségű ismeretlen folyadék van. Mennyi az ismeretlen folyadék α sűrűsége, ha a teljes folyadékmennyiség súlypontja éppen a kétféle folyadék határán van?

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H — Gyakorló feladatok megoldásai — F

4.) Milyen $p > 0$ paraméter-értékekre lesz konvergens a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\sqrt{n}}$ numerikus sor?

Megoldás: A határérték-teszttel (vagy más néven speciális összehasonlító kritériummal) dolgozunk: összehasonlítjuk a sorunk a_n elemeit és a $b_n := n^{-p-1/2}$ sorozatot, amelyre $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}(n^{-p})}{n^{-p}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \operatorname{tg}'(x)|_{x=0} = 1$, ami véges és nem nulla.

A kritérium értelmében ezért a két pozitív tagú sor – az eredeti és a $\sum_n n^{-p-1/2}$ sor – egyszerre lesz konvergens ill. divergens.

Ez utóbbi sor viszont éppen a p-harmonikus sor, csak a paraméter értéke van eltolva 1/2-del: ezért pontosan akkor konvergens, ha $p + 1/2 > 1$, aza $p > 1/2$, és divergens, ha $p \le 1/2$.

5. a) Fejtsük Fourier-sorba a $\Phi(x) := |\sin x|$ függvényt!

b.) Állapítsuk meg, hol és hová konvergens a függvény Fourier-sora!

c.) Behelyettesítve az $x = \pi/2$ helyen, adjunk végtelen sor előállítást a π értékének meghatározására.

d.) Mondjunk olyan küszöbszámot, amelyet elérve a tagok összeadásával ebben a sorban, π értékére már legalább 3 tizedesre jó közelítést kapunk!

Megoldás: a.) A függvény páros, ezért tiszta cos sor lesz. Ráadásul a fv. periodikus π-vel is, így Fourier-sorában csak páros multiplicitású tagok szerepelhetnek, ami akár a számolás során is látható lesz: nyilván $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = 2/\pi$, és $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx\,dx$. Ha $n = 1$, akkor tehát $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x\,dx = 0$, és ha $n > 1$, akkor a $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$ azonosságot alkalmazva $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(n+1)x - \sin(n-1)x\,dx = \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}]_0^\pi = \frac{1}{\pi}((-1)^{n-1} - 1)[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}] = \frac{-4}{\pi(n^2-1)}$, ha $n = 2k$ páros, és 0, ha n páratlan.

Összefoglalva tehát Φ Fourier-sora $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}\cos(2kx)$ alakú.

b.) Esetünkben Φ szakaszonként folytonosan differenciálható, és folytonos is. Az előadáson tanult tétel szerint így a Fourier-sor minden pontban konvergens Φ-hez. Az $O(1/n^2)$-es majorizálás miatt a Fourier-sor egyébként normálisan, így abszolút és egyenletesen is konvergál.

c.) $\Phi(\pi/2) = 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}\cos(2k\pi/2)$, így $\pi = 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-1/4}$.

d.) A sor Leibniz típusú, ezért elegendő addig a k-ig elmenjünk, hogy $\frac{1}{(k+1)^2-1/4} < \varepsilon := 0,0005$, azaz $(k+1)^2 - 1/4 > 2000$: ehhez $k_0 \ge \sqrt{2000}$ elegendő. Az pl. könnyen látható, hogy $k_0 = 50$ már jó, mert $50^2 > 2000$ (az élesebb $k_0 = 44$ is látszik, mert $45^2 = 8100/4 > 2000$).

6.) Hány megoldása van az $\mathbf{y}C = \mathbf{0}$ egyenletnek, ha $C := \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$?

Megoldás: Ez csak a mátrix szingularitásától függ: ha C nem-szinguláris, akkor a megoldás egyértelmű (csak a $\mathbf{0}$ vektor), ha szinguláris, akkor viszont végtelen sok megoldás van.

(Vegyük észre, hogy az egyenlet ekvivalens a szokásosabb alakban felírható transzponáltjával: $C^T\mathbf{y}^T = \mathbf{0}^T$ – azonban C szingularitása szempontjából ez ekvivalens kérdés.)

A szingularitás viszont a determináns eltűnésével ekvivalens, így elegendő azt megnézni, hogy a determináns nulla lesz-e. Ehhez ekvivalens sor- és oszlopműveleteket egyaránt végezhetünk, így könnyen kinullázhatunk sorokat és oszlopokat:

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{S_1 - 2S_3}{=} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{S_1 + (3/2)S_4}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3/2 \\ 4 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3/2 \\ 4 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \overset{S_3 - 2S_1}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

A determináns 0, a C mátrix szinguláris, az egyenletnek ∞ sok megoldása van.

7.) Az $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix sajátértékei $1, 1/2, 1/3, 1/4$, amelyekhez rendre a

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

sajátvektorok tartoznak. Adja meg az A^{-1} mátrixot!

Megoldás. Az A^{-1} mátrix sajátértékei az A mátrix sajátértékeinek reciprokai, nevezetesen az $1, 2, 3, 4$ számok, míg az A és A^{-1} mátrixok sajátvektorai megegyeznek. Az A^{-1} mátrix sajátvektoraiból mint oszlopokból képzett mátrixot Q-val jelölve, és D-vel jelölve az A^{-1} mátrix ezen sajátvektorok szerinti diagonalizáltjának diagonális mátrixát – amelyben tehát a főátlóban az $1, 1/2, 1/3, 1/4$ sajátértékek szerepelnek – az A mátrix inverze a $D = Q^{-1}AQ$ spektrálfelbontás alapján $D^{-1} = Q^{-1}A^{-1}Q$, $A^{-1} = QD^{-1}Q^{-1}$ alakban határozható meg, amihez természetesen a Q^{-1} mátrixot ki kellett számolni Gauss-Jordan eliminációval: :)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_4 + 2S_1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_2 \leftrightarrow S_3, (-1)\cdot S_1}{\Leftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{S_1+2S_2 \\ S_3-S_2,\ S_4-4S_2}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \overset{S_3 \leftrightarrow S_4}{\Leftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{S_3 + S_4, S_1 - S_3}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Innen tehát

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 12 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 12 & 3 & -27 & 7 \end{bmatrix}.$$

8.) Az $f(x,y) = z = z(x,y)$ függvényt az $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$ függvényegyenlet impliciten határozza meg. Számítsa ki az f függvény gradiensét a $P(0,1)$ pontban!

Megoldás: Tanult tétel szerint ha $F(x_1,\dots,x_n,z) \equiv c$ (konstans) a $z = f(x_1,\dots,x_n)$ helyeken, akkor f parciális deriváltjait a $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ formula adja meg minden olyan helyen, ahol a nevező nem nulla.

Ezért esetünkben $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\cos y - z\sin x}{\cos x - y\sin z} = \frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z}$ és $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{-x\sin y + \cos z}{\cos x - y\sin z} = \frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}$ mindenhol, ahol $\cos x - y\sin z \neq 0$. Szerencsére a P pontban ez a nevező nem tűnik el, mert $\cos 0 - 1\sin z = 1 - \sin z$, és $z \neq \pi/2 + 2k\pi$, mert akkor $\cos z = 0$ és a függvényegyenletből $0\cos 1 + 1\cos(\pi/2 + 2k\pi) + (\pi/2 + 2k\pi)\cos 0 = \pi/2 + 2k\pi \neq 1$ volna.

További gondolkozással az is kiszámolható, hogy a $P(0,1)$ ponthoz csak az egyetlen $f(P) = z = 0$ érték tartozhat, mivel a $0\cos 1 + 1\cos z + z\cos 0 = 1$ egyenletnek – azaz a $z + \cos z = 1$ egyenletnek – az egyetlen gyöke a $z = 0$: ugyanis $z + \cos z - 1$ szigorúan monoton növő függvény (a deriváltja $1 - \sin z \geq 0$, és egyetlen intervallumon sem azonosan nulla — A1 anyag!), és a 0-ban nyilvánvalóan 0, tehát más gyöke ezért nincs.

Így a P pontban használhatjuk a kapott formulát, és ezért $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{0 - \cos 1}{\cos 0 - 1\sin 0} = -\cos 1$ és $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \frac{0\sin 1 - \cos 0}{\cos 0 - 1\sin 0} = -1$. A gradiens vektor tehát $\nabla f(0,1) = (-\cos 1, -1)$.

9.) Vizsgálja meg, hogy a $k(x,y) := e^x(x+y) - 2x - y$ függvénynek hol vannak szélsőértékei!

Megoldás: Mivel $k \in C^2(\mathbb{R}^2)$, először is kritikus pontokat keresünk. $\nabla k(x,y) = (e^x(x+y) + e^x - 2, e^x - 1)$, és $\nabla k(x,y) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$ azaz $x = 0$ és $e^x(x+y) + e^x - 2 = 0 \Rightarrow y + 1 - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$, tehát az egyetlen kritikus pont az $\mathbf{a} := (0,1)$ pont.

A függvény itteni viselkedésének eldöntéséhez kiszámíthatjuk a $H(\mathbf{a}) = D^{(2)}k(\mathbf{a})$ második deriváltat vagy Hesse-mátrixot: általában erre

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 k}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 k}{\partial xy} & \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x(x+y+2) & e^x \\ e^x & 0 \end{bmatrix} = e^x \begin{bmatrix} x+y+2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

és a kérdéses $\mathbf{a} = (0,1)$ pontban így speciálisan $H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. A sajátértékei a $P_H(\lambda) = (3-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei, amelyek a $\lambda_{1,2} = 3/2 \pm \sqrt{9/4 + 1} = 3/2 \pm \sqrt{13}/2$ számok; a másodfokú egyenlet $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ alkjából is jól láthatóan a gyökök szorzata – ami egyébként pontosan a $\det H$ determináns – negatív.

Azt találjuk tehát, hogy a második derivált indefinit, így nincsen a függvénynek szélsőértéke, hanem nyeregpontja van.

10.) Teljes differenciál-e az $(x^2 + \cos y)\ dx + (z^2 - x \sin y)\ dy + 2zydz$ differenciál?

Megoldás: Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy a a feltételezett potenciálfüggvényre ("primitív függvényre", aminek az adott kifejezés a differenciálja lehetne) teljesülnek-e a Young-tétel feltételei, azaz a keresztbe vett parciális deriváltakra azonosságot tapasztalunk-e?

Tehát legyen $U(x, y, z) := x^2 + \cos y, V(x, y, z) := z^2 - x \sin y, W(x, y, z) := 2zy$ — ekkor az a kérdés, hogy az $U'_y = V'_x$, $U'_z = W'_x$, $V'_y = W'_z$ azonosságok teljesülnek-e?

Ezeket kiszámolva: $U'_y = -\sin y$, $V'_x = -\sin y$, $U'_z = 0$, $W'_x = 0$, és $V'_z = 2z$, $W'_y = 2z$, tehát a Young-tételnek megfelelő azonosságok teljesülnek, és így az $Udx+Vdy+Wdz$ kifejezés teljes differenciál.

Egyébként a potenciálfüggvényt is meg lehet határozni a feltételezett $F'_x = U, F'_y = V, F'_z = W$ formulákból: $F = \frac{1}{3}x^3 + x \cos y + A(y, z) = z^2y + x \cos y + B(x, z) = z^2y + C(x, y)$, így pl. az első kettőből $\frac{1}{3}x^3 + A(y, z) - z^2y = B(x, z)$, ami tehát nem függhet y-tól, ezért $A(y, z) - z^2y$ sem függhet y-tól, azaz akkor csak z-től függhet, és $a(z) = A(y, z) - z^2y$, $A(y, z) = z^2y + a(z)$; a második és a harmadik egyenletből pedig hasonlóan $x \cos y + B(x, z) = C(x, y)$ nem függ z-től, ezért $B(x, z) = b(x)$; és ezekből $F(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + x \cos y + z^2y + a(z) = z^2y + x \cos y + b(x)$, így $b(x) = \frac{1}{3}x^3 + a(z)$, tehát $a(z) = c$ konstans és $b(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$: végül tehát $F(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + x \cos y + z^2y + c$ (amit parciálisan deriválva vissza is kapjuk az előírt $\nabla F = (U, V, W)$ gradiens vektort). A potenciálfüggvénynek a megkeresése azonban nem része a feladat kitűzésének.

11.) Konvergens-e a $\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ egységkörben a (0-ban nem korlátos integrandussal felírt) $\iint_{\mathcal{D}} \log(x^2 + y^2) dxdy$ improprius integrál? Bizonyítsa be, ha nem, vagy számítsa ki, ha igen!

Megoldás: Az improprius integrál csak az O-ban válik végtelenné, ezért definíció szerint $\iint_{\mathcal{D}} \log(x^2 + y^2) dxdy = \lim_{\delta \to 0} \iint_{\mathcal{D} \setminus \delta\mathcal{D}} \log(x^2 + y^2) dxdy$. Az utóbbi gyűrű alakú halmazon bevezetve a polárkoordinátákat, a szokásos $(x, y) = T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ áttérési leképezéssel ez a halmaz az $E := [\delta, 1] \times [0, 2\pi]$ "polár-koordinátás téglának" felel meg, így az ismert $J_T(r, \varphi) = r$ polár-áttéréses Jacobi-determináns értékét felhasználva $\iint_{\mathcal{D} \setminus \delta\mathcal{D}} \log(x^2 + y^2) dxdy = \iint_E \log(r^2) r dr d\varphi = 2\pi \int_\delta^1 2r \log r \ dr = 2\pi[r^2 \log r - \frac{1}{2}r^2]_\delta^1 = -2\pi(1 - \delta^2 + 2\delta^2 \log \delta) \to -2\pi \quad (\delta \to 0)$. Tehát a limesz, és így az improprius integrál is létezik, és $\iint_{\mathcal{D}} \log(x^2 + y^2) dxdy = -2\pi$.

12.) Egy talpas pohár kelyhe a $z = x^2$ parabola elforgatásával keletkező forgási paraboloid alakját mutatja. A pohárban 4 cm magasságig 1 sűrűségű víz, afelett pedig 9 cm magasságig α sűrűségű ismeretlen folyadék van. Mennyi az ismeretlen folyadék α sűrűsége, ha a teljes folyadékmennyiség súlypontja éppen a kétféle folyadék határán van?

Megoldás: Jelölje a pohár folyadékkal töltött belsejét P: ekkor a pohár fala a $z = x^2 + y^2$, $(0 \leq z \leq 9 \Leftrightarrow |(x, y)| \leq 3)$ egyenletekkel írható le, így könnyen látható, hogy $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (0 \leq)|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3, \ x^2 + y^2 \leq z \leq 9\}$.

A forgásszimmetria miatt a súlypont (tömegközéppont) a z tengelyen helyezkedik el, mégpedig a $\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M}$ magasságban, ahol M a teljes P-ben elhelyezkedő folyadékmennyiség tömege, M_{xy} pedig az xy síkra gyakorolt statikai nyomatéka. Tehát azt az egyenletet kell megoldjuk, hogy $\overline{z} = 4$, amihez az ismeretlen α paraméterrel ki kell számítsuk az M össztömeget és az M_{xy} statikai nyomatékot.

Vegyük észre, hogy, bár nehezíti a dolgunkat, hogy változó sűrűségű anyaggal van dolgunk, azért a sűrűségfüggvény igen egyszerű alakú, hiszen csak a magasságtól függ, és konkrétan így írható fel: $\rho(x,y,z) = \rho_0(z) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le z \le 4 \\ \alpha & \text{ha } 4 \le z \le 9 \end{cases}$.

A feladatot direkt integrálással is meg lehet oldani, de talán elegánsabb és így könnyebb az (r,φ,h) hengerkoordinátákra áttérve dolgozni. Valóban, ha $H(r,\varphi,h) = (x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)$ az áttérési transzformáció, akkor $Q := H^{-1}(P) = \{(r,\varphi,h) \ : \ 0 \le r \le 3, 0 \le \varphi \le 2\pi, r^2 \le h \le 9\} = \{(r,\varphi,h) \ : \ 0 \le h \le 9, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le \sqrt{h}\}$ egyszerű alakú, ráadásul a sűrűségfüggvény is ugyanolyan egyszerű marad, hiszen $\rho(H(r,\varphi,h)) = \rho_0(h)$.

A kiszámítandó mennyiségek tehát hengerkoordinátákra áttérve (és eközben felhasználva, hogy az áttérés Jacobi-determinánsa a jól ismert $J_H(r,\varphi,h) = r$ érték), majd Fubini tételének alkalmazásával szukcesszív integrálásra átalakítva:

$$M = \iiint_P \rho(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_Q \rho_0(h) r\ drd\varphi dh = \int_0^9 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} \rho_0(h) r\ dr\ d\varphi\ dh$$

és

$$M_{xy} = \iiint_P z\rho(x,y,z) dxdydz = \iiint_Q h\rho_0(h) r\ drd\varphi dh = \int_0^9 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} h\rho_0(h) r\ dr\ d\varphi\ dh.$$

A belső dr és $d\varphi$ szerinti integrálok könnyen kiszámíthatóak, mert sem h, sem $\rho_0(h)$ nem függenek ezektől a változóktól (csak az r Jacobi-determináns értékét kell integrálni, ami φ-ben szintén konstans, de r-ben is igen egyszerű), így tehát

$$M = 2\pi \int_0^9 \rho_0(h)[r^2/2]_0^{\sqrt{h}}\ dh = \pi \int_0^9 \rho_0(h) h dh = \pi \left(\int_0^4 h dh + \int_4^9 \alpha h dh \right) = \pi \left(8 + \alpha \frac{65}{2} \right)$$

és hasonlóan számolva

$$M_{xy} = 2\pi \int_0^9 h\rho_0(h)[r^2/2]_0^{\sqrt{h}}\ dh = \pi \int_0^9 \rho_0(h) h^2 dh = \pi \left(\int_0^4 h^2 dh + \int_4^9 \alpha h^2 dh \right) = \pi \left(\frac{64}{3} + \alpha \frac{665}{3} \right),$$

amiből

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi\left(\frac{64}{3} + \alpha\frac{665}{3}\right)}{\pi\left(8 + \alpha\frac{65}{2}\right)} = \frac{128 + 1330\alpha}{48 + 195\alpha}$$

Behelyettesítve a kitűzés szerinti $\overline{z} = 4$ értéket és megoldva az egyenletet, $\alpha = \frac{64}{550} \approx 0,116$ adódik.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H — Vizsga gyakorló feladatsor — G

Kiadva: 2016. május 22.

ELMÉLETI RÉSZ: Lásd a kiadott elméleti kérdéssort.

4.) Konvergens-e a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(\sqrt{n}-\log^2 n)}{n!(n-\sqrt{n})}$ végtelen sor? Igazolja is állítását!

5.) Fejtse hatványsorba a $C(x) := \int_0^x t\cos(t^{3/2})dt$ függvényt! Találjon olyan N küszöbszámot, ameddig kiszámolva a C-re felírt hatványsor összegét, a közelítés már $\varepsilon := 5\cdot 10^{-5}$ hibán belül marad, ha a) $x = 0,4$ b) $x = 2$.

6.) Sajátértéke-e a $T := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixnak a $\lambda = 6$ érték?

7.) Tekintsük a $\tau(x,y) := 4\arctan\left(\frac{x+y}{2}\right)$ függvényt! Határozza meg a függvény összes érintősíkját illetve támaszegyenesét az $(1,1,\pi)$ ponton keresztül!

8.) Legyen $t(x,y,z) := x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ az $x > 0, y > 0, z > 0$ térnyolcadban. Keresse meg a t függvény összes szélsőértékeit!

9.) Legyen $F(x,y,z) := (2xy + y\cos z, e^x - z, x^2 + \mathrm{ch}\,(yz)) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés! Tekintsük a $P(0,1,0)$ pont középű r sugarú $G := G(P,r) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + (y-1)^2 + z^2 \le r^2\}$ gömböt, és a G gömb $E = F(G)$ képhalmazának térfogatát! Számítsa ki a $\lim_{r\searrow 0} V(E)/r^3$ határértéket!

10.) Teljes differenciál-e az $(\frac{y}{x} + \frac{z}{y})\, dx + y\log x\, dy + \frac{1}{z}\, dz$ kifejezés?

11.) Számítsa ki az $\int_0^\infty \left(\mathrm{ch}\,(x^2) - \mathrm{sh}\,(x^2)\right)\, dx$ integrált!

12.) Számítsa ki annak az (egyenletes, egységnyi sűrűségű) "hengeres ék" alakú E testnek a z tengelyre gyakorolt I_z forgatónyomatékát, amelyet az xy-síkba rajzolt egységkör fölé állított egyenes hengerből maga az xy sík és a $z = x$ sík pozitív félsíkja (tehát amelyre $z, x > 0$) kivág.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H – Gyakorló feladatok megoldása – G

4.) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(\sqrt{n}-\log^2 n)}{n!(n-\sqrt{n})}$ végtelen sor? Igazolja is állítását!

Megoldás: Igen, konvergens lesz. Első közelítésben azt lehet "levenni" a formuláról, hogy a "lényeges része" olyan $2^n/n!$ (nagyon konvergens), pontosabban olyan $2^n\sqrt{n}/n\cdot n!$ (még konvergensebb) tagokból fog állni.

Innen vagy a határérték-teszttel dolgozunk, és azt mondjuk, hogy a sorunk ekvikonvergens a $\sum_n \frac{2^n\sqrt{n}}{n!n}$ sorral (ami konvergens, hiszen a $\sum_n 2^n/n! = e^2$ sor majorálja), vagy mindjárt becsléseket alkalmazunk, pl. használva, hogy ha $n\geq 4$, akkor $n-\sqrt{n}\geq\sqrt{n}$ és így legalábbis $n\geq 4$-re a sorunk tagjait becsülhetjük $2^n/n!$ tagokkal.

5.) Fejtse hatványsorba a $C(x) := \int_0^x t\cos(t^{3/2})dt$ függvényt! Találjon olyan N küszöbszámot, ameddig kiszámolva a C-re felírt hatványsor összegét, a közelítés már $\varepsilon := 5\cdot 10^{-5}$ hibán belül marad, ha a) $x = 0,4$ b) $x = 2$.

Megoldás: A cos függvény analitikus, hatványsora abszolút és egyenletesen konvergens pl. az egész $[0,1]$-en, így a $t^{3/2}$ érték behelyettesítése és a tagonkénti integrálás is elvégezhető, amiből $C(x) = \int_0^x t\sum_n \frac{(-1)^n t^{3n}}{(2n)!}dt = \sum_n \int_0^x \frac{(-1)^n t^{3n+1}}{(2n)!}dt = \sum_n \frac{(-1)^n}{(3n+2)(2n)!}[t^{3n+2}]_0^x = \sum_n \frac{(-1)^n x^{3n+2}}{(3n+2)(2n)!}$.

Ez egy alternáló (Leibniz típusú) sor – tetszőleges fix x esetén és elég nagy n-re u.i. a tagok abszolút értéke csökkenőleg 0-hoz fog tartani (az előjelek pedig nyilvánvalóan alternálnak) – így a hibatagjára $|R_n|\leq|a_{n+1}|$. Azaz elegendő nekünk, ha $|a_{n+1}| = \frac{x^{3n+5}}{(3n+5)(2n+2)!} < 5\cdot 10^{-5}$ teljesül.

Ez pedig a) esetén már $n=1$-re is igaz, mert $\frac{(0,4)^{3n+5}}{(3n+5)(2n+2)!}|_{n=1} = \frac{(0,4)^8}{8\ 4!} = \frac{(0,4)^8}{8\ 4!} = 2^8 10^{-8}/3 = 1024/12\cdot 10^{-8} < 10^{-6}$. Tehát az $N=1$ küszöbindex is alkalmas.

A b) esetben a becslésünk $\frac{2^8}{8\ 4!} = 4/3$ az $n=1$ választással, és egy darabig még el kell menni: de ha pl. $n\geq N=9$, akkor $n+1\geq 10$ és $|a_{n+1}|\leq \frac{2^{35}}{35\ 20!} < 2^{30}/\{20\ 10^{10}\ 9!\} < 1/10! < 10^{-5}$ egészen biztosan elegendő.

6.) Sajátértéke-e a $T := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 0\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ mátrixnak a $\lambda = 6$ érték?

Megoldás: Ez pontosan azt a kérdést jelenti, hogy $|T-6I| = 0$ teljesül-e, azaz

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 & 8 & 0\\ 1 & -3 & 5 & 7 & 9\\ 1 & 0 & -5 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 2 & -3\end{vmatrix} = 0 \quad ?$$

Ekvivalens sor- és oszlopműveleteket végezhetünk, és a pontos értékre sincsen szükségünk, csak a determináns nem-nulla volta az érdekes. Kezdjük azzal, hogy a 4. oszlopot hozzáadjuk a másodikhoz, mivel így a negyedik sorban már csak egyetlen nem-nulla elem marad és eszerint a sor szerint egyszerűen kifejthetjük a determinást:

$$|T-6I| = \begin{vmatrix} -5 & 10 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -5 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -5 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{O_1+O_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{S_2-3S_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 20 & 6 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{S_2+S_3}{=} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} \neq 0$$

Tehát a $\lambda = 6$ érték *nem* sajátértéke a T mátrixnak.

7.) Tekintsük a $\tau(x,y) := 4\arctan\left(\frac{x+y}{2}\right)$ függvényt! Határozza meg a függvény összes érintősíkját illetve támaszegyenesét az $(1,1,\pi)$ ponton keresztül!

Megoldás: A függvény parciális deriváltjai folytonosak, így a függvény differenciálható, és ezért van érintősíkja, amelynek egyenlete $z - \pi = \frac{\partial\tau}{\partial x}|_{(1,1)}(x-1) + \frac{\partial\tau}{\partial y}|_{(1,1)}(y-1) = (x-1)+(y-1)$, azaz $z = x+y+\pi-2$.

Differenciálható függvényre az érintősík vagy támaszsík is, és akkor ez az egyetlen támaszsík, vagy egyáltalán nem is létezik támaszsík.

Annak eldöntéséhez, hogy esetünkben az érintősík támaszsík-e, elegendő a sík $(1,1,\pi)$ ponton áthaladó egyeneseit megvizsgálni. Legyen $\ell(t) := (1+at, 1+bt)$, ekkor a kérdés az, hogy $\tau|_\ell \le, \ge L(t)$, ahol $L(t) = (a+b)t + \pi$ a $z(x,y)$ érintősík megszorítása ℓ-re. Most $\tau(1+at, 1+bt) = 4\arctan(1+\frac{a+b}{2}t)$ konkáv függvény, így $L(t) \ge \tau(t)$. Mivel ez minden (a,b) irányban így van, az egész érintősík felette halad a fügvénynek, tehát felső támaszsík lesz.

Nem dönthető el a támaszsík kérdése a második derivált pontbeli kiszámításával. A Hesse-mátrix ugyanis

$$D^{(2)}(\tau)|_{(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}|_{(1,1)} & \frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y}|_{(1,1)} \\ \frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y}|_{(1,1)} & \frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}|_{(1,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-16(x+y)}{(4+(x+y)^2)^2}|_{(1,1)} & \frac{-16(x+y)}{(4+(x+y)^2)^2}|_{(1,1)} \\ \frac{-16(x+y)}{(4+(x+y)^2)^2}|_{(1,1)} & \frac{-16(x+y)}{(4+(x+y)^2)^2}|_{(1,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

ami negatív szemidefinit – sajátértékei $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = -1$ – és ezért az érintősík függvényhez képesti elhelyezkedését egymagában nem dönti el.

Ha tehát a derivált segítségével akarunk célhoz érni, akkor a kérdést tovább kell vizsgálni. A második derivált kiszámításából láthatjuk, hogy általában egy tetszőleges (x,y) pontban

$$D^{(2)}(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\tau}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-16(x+y)}{(4+(x+y)^2)^2} & \frac{-16(x+y)}{(4+(x+y)^2)^2} \\ \frac{-16(x+y)}{(4+(x+y)^2)^2} & \frac{-16(x+y)}{(4+(x+y)^2)^2} \end{bmatrix},$$

ami egy szinguláris mátrix lesz, $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = \frac{-32(x+y)}{(4+(x+y)^2)^2}$ sajátértékekkel. Ez az $x+y \ge 0$ félsíkban – tehát az $(1,1)$ pont egy környezetében – negatív szemidefinit mátrixot jelent, így a kvadratikus alak negatív szemidefinit az $x+y>0$ nyílt félsíkban és ezért ott konkáv is. A konkávitásból pedig következik, hogy az érintősík a függvény felett halad, tehát az (1,1) pontbeli érintősík is felső támaszsík lesz: így a második derivált *egy egész környezetben* való megvizsgálásával is célhoz érhettünk.

8.) Legyen $t(x,y,z) := x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ az $x > 0, y > 0, z > 0$ térnyolcadban. Keresse meg a t függvény összes szélsőértékeit!

Megoldás: A függvény $C^2(D)$ osztályú az értelemzési tartományán, a $Q := \{(x,y,z) \ : \ x > 0, y > 0, z > 0\}$ térnyolcadban, és a határon sehol sincsen értelmezve, ezért minden szélsőértékének kritikus pontba kell esnie. A gradiens vektor $\nabla t(x,y,z) = (1 - \dfrac{y^2}{4x^2}, \ \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2}, \ \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2})$, ami $\mathbf{0}$ csak úgy lehet Q-ban (az első koordináta miatt), ha $y = 2x$, azaz ezért a második koordinátából $y = z$ és végül a harmadik szerint $z = 1$, tehát $P = (\frac{1}{2}, 1, 1)$. Az a kérdés maradt, hogy ebben az egyetlen kritikus pontban hogyan viselkedik a függvény.

A második derivált kiszámításához eleve tudjuk a Young tétel szerinti szimmetriát, így elegendő csak a felső hárömszögmátrix részt kiszámolni, és a szimmetrikus elemeket beírni: minden esetre a Hesse-mátrixra kapjuk, hogy

$$H := D^{(2)}(t)(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial xy} & \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \end{bmatrix} \Bigg|_P = \begin{bmatrix} \frac{y^2}{x^3} & \frac{-y^2}{2x^2} & 0 \\ \frac{-y^2}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & \frac{-2z}{y^2} \\ 0 & \frac{-2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{bmatrix} \Bigg|_P = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

H definitségével kapcsolatban a sajátértékek megkeresése nehézségekbe ütközik: azt ugyan elég könnyű látni, hogy a $\lambda = 0$ nem lehet sajátérték, mivel $\det H \neq 0$, de a $P_H(\lambda) = |H - \lambda I|$ karakterisztikus polinom felírása – a determináns kiszámolása – azért elég hosszadalmas. (Azért el lehet végezni: eredményül azt kapjuk, hogy $P_H(\lambda) = -\lambda^3 + 17\lambda^2 - 82\lambda + 88$.) Ámde ezután még látni kellne a sajátértékek – aza $P_H(\lambda)$ gyökei – előjelét, és ez még nehézkesebb.

Ehelyett ezért a főminorok előjelével számolunk: $M_1 = h_{11} > 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20 > 0$ és végül $M_3 = |H| = 88 > 0$, tehát az összes főminorok pozitívak, így a Hesse-mátrix pozitív definit. Mivel pedig $H \gg 0$, a függvénynek minimuma van a P pontban.

9.) Legyen $F(x,y,z) := (2xy + y\cos z, e^x - z, x^2 + \operatorname{ch}(yz)) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés! Tekintsük a $P(0,1,0)$ pont közepű r sugarú $G := G(P,r) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq r^2\}$ gömböt, és a G gömb $E = F(G)$ képhalmazának térfogatát! Számítsa ki a $\lim_{r \searrow 0} V(E)/r^3$ határértéket!

Megoldás: Geometriailag az a feladat, hogy állapítsuk meg, hogy a $P(0,1,0)$ pont kis környezetében hogyan (közelítőleg milyen arányban) változtatja meg a térfogatot a leképezés! A G gömb térfogata $\frac{4}{3}\pi r^3$, és a feladat kérdése az, hogy számítsuk ki a $V(E) = \iiint_E 1 du dv dw$ térfogati integrált. Jelölje $(u,v,w) = (F_1, F_2, F_3) = (2xy + y\cos z, e^x - z, x^2 + \operatorname{ch}(yz))$ az F leképezés koordináta-függvényeit. Ha van az F leképezésnek differenciálható $T = F^{-1}$ inverze, akkor $T(E) = G$ és így az $(x,y,z) = T(u,v,w)$ helyettesítéssel $V(E) = \iiint_G 1 \cdot J_T(x,y,z) dx dy dz$, ahol $J = |\det DT(Q)|$ a $Q = F(P)$ pontban az $F^{-1} = T$ leképezés deriváltjának Jacobi-determinánsa.

Az inverz függvény létezik a $Q = F(P)$ pont egy kis környezetében és ott még differenciálható is pontosan akkor, ha maga a P pontbeli derivált nem-szinguláris: ilyenkor pedig az inverz függvény deriváltjának mátrixa a derivált mátrix inverz mátrixa: $DF^{-1}(Q) = DF(P)^{-1}$. Tehát a Jacobi-determinánsokra $|J_T(Q)| = 1/|\det DF(P)|$, amennyiben $DF(P)$ nem-szinguláris. (Vegyük észre, hogy így a megoldáshoz ki sem kell számoljuk sem a $T = F^{-1}$ leképezés explicit alakját, sem a Q pont értékét.)

Számítsuk ki tehát a $DF(P)$ derivált-mátrixot, behelyettesítéssel annak P-beli értékét, és végül a mátrix determinánsát!

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+\cos z & -y\sin z \\ e^x & 0 & -1 \\ 2x & z\mathrm{sh}\,(yz) & y\mathrm{sh}\,(yz) \end{bmatrix},$$

aminek az értéke P-ben $DF(0,1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathrm{sh}\,(1) \end{bmatrix}$, speciálisan tényleg nem-szinguláris, és a determinánsa az utolsó sor szerint kifejtve $\det F(P) = -\mathrm{sh}\,(1)$.

Tehát a keresett határérték $\lim_{r\searrow 0} V(E)/r^3 = J_T(Q) = 1/|\det DF(P)| = \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,1} = \dfrac{2e}{e^2-1}$.

10.) Teljes differenciál-e az $(\dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y})\ dx + y\log x\ dy + \dfrac{1}{z}\ dz$ kifejezés?

Megoldás: A differenciált $dF := Adx + Bdy + Cdz$ alakban írva, a Young tétel értelmében annak kell teljesülnie, hogy $A'_x = B'_x$, $A'_z = C'_x$, $B'_z = C'y$.

De itt pl. mindjárt az első feltétel bizony nem teljesül: $A'_y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2} \neq B'_x = \dfrac{y}{x}$.

Így ez nem teljes differenciál, nincsen hozzá potenciálfüggvény.

11.) Számítsa ki az $\int_0^\infty \big(\mathrm{ch}\,(x^2) - \mathrm{sh}\,(x^2)\big)\ dx$ integrált!

Megoldás: Ez egy egyváltozós improprius integrál, ami könnyen átalakítható: $\mathrm{ch}\,a - \mathrm{sh}\,a = e^{-a}$. Ezért a keresett érték $A := \int_0^\infty e^{-x^2}\ dx := \lim_{R\to\infty} e^{-x^2}\ dx$. Ez egy abszolút konvergens improprius integrál, mert pl. az e^{-x} majorálja $x \geq 1$-ben (és $\int_1^\infty e^{-x} = 1/e < \infty$).

Írjuk fel két példányban, de különböző változókkal az integrált, és szorozzuk össze, majd alkalmazzuk Fubini tételét, amely a konvergens integrálokat többes integrálokból szukcesszív egyváltozós integrálokká alakítja és viszont: így $A^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\ dx \int_0^\infty e^{-y^2}\ dy = \iint_{[0,\infty]^2} e^{-x^2-y^2}\ dxdy$.

Ez is egy improprius integrál, ez is konvergens, de ennek értelmezése egyébként $\iint_{[0,\infty]^2} e^{-x^2-y^2}\ dxdy = \lim_{R,T\to\infty} \iint_{[0,R]\times[0,T]} e^{-x^2-y^2}\ dxdy$. Mindenesetre geometriailag jól láthatóan az integrálási tartomány az S pozitív síknegyed, és az integrandus az $r := |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$ mennyiség függvényeként áll elő, ezért természetes ötlet polárkoordinátákra átírni a kiszámítandó integrált. A polárkoordinátákkal jellemzett sík (r,φ) pontjainak megfeleltetve a hozzájuk tartozó $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$ koordinátákat, az áttérés $T(r,\varphi) = (x,y), \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transzformációjának explicit alakját kapjuk, amely az S pozitív síknegyed integrálási tartományt mint a $D := [0,\infty] \times [0,\pi/2]$ "poláris tégla" képét állítja elő. Ezért

$$\iint_{[0,\infty]^2} e^{-x^2-y^2}\ dxdy = \iint_{[0,\infty]\times[0,\pi/2]} e^{-r^2} J_T(r,\varphi)\ drd\varphi,$$

ahol az áttérés Jacobi-determinánsa $J_T(r,\varphi) = |DT(r,\varphi)| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{matrix} \right\| = r$.

A teljes integrandus tehát re^{-r^2} alakú, jól kezelhető függvény lesz. Az integrált ismét Fubini tételével szukcesszív egyszeres integrálokká alakítva, és φ-ben a konstans kifejezést azonnal ki is integrálva

$$A^2 = \iint_{[0,\infty]\times[0,\pi/2]} re^{-r^2}\ drd\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-r^2}\ dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\pi}/2.$$

12.) Számítsa ki annak az (egyenletes, egységnyi sűrűségű) "hengeres ék" alakú E testnek a z tengelyre gyakorolt I_z forgatónyomatékát, amelyet az xy-síkba rajzolt egységkör fölé állított egyenes hengerből maga az xy sík és a $z = x$ sík pozitív félsíkja (tehát amelyre $z, x > 0$) kivág.

Megoldás: Egy (x, y, z) pontbeli egységnyi tömeg forgatónyomatéka a pontnak a z tengelytől vett távolsága négyzete, tehát $x^2 + y^2$. A feladatban geometriailag leírt test pontjait úgy lehet felírni, mint $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ 0 < z < x < \sqrt{1-y^2}\ (|y| \leq 1)\}$, tehát a keresett mennyiség integrál alakja

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\ dxdydz = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x (x^2 + y^2)\ dz\ dx\ dy,$$

ahol itt Fubini tételével az integrált mindját szukcesszív integrálásokra is átalakítottuk. Az integrált többféleképpen is kiszámíthatjuk: az egyik lehetőség a jobb oldalon adódott háromszoros integrálás egymás utáni elvégzése, a másik pedig a háromszoros integrál hengerkoordinátákra történő áttéréssel való kiszámítása.

A direkt (Fubini tétel szerinti) számolás első lépése triviális, mert az integrandus konstans, nem függ z-től: így a dz integrálás után $x(x^2 + y^2)$ lesz az integrandus. Ezt folytatva

$$I_z = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x(x^2 + y^2)\ dx\ dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_{-1}^1 \frac{1-y^4}{4}\ dy = \frac{2}{5}.$$

A második módszerhez alkalmazzuk a $H(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)$ hengerkoordinátás felírást, amellyel $E = H(S)$ lesz, ahol S az $R := [0, 1] \times [-\pi/2, \pi/2]$ – az (r, φ) változókban felírt — "polárkoordinátás tégla" feletti $h = h(r, \varphi) = r\cos\varphi$ függvény-felület alatti tartomány $\mathbb{R}^3$-ból: $S = \{(r, \varphi, h) \in \mathbb{R}^3 \ :\ 0 \leq r \leq 1, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq h \leq r\cos\varphi\}$. (Itt használjuk, hogy ha $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, akkor $r\cos\varphi \geq 0$.)

Megjegyezzük, hogy igazából itt $h = z$ miatt a könyvekben szokásos *egyszerre két különböző értelemben is* ugyanazt a z korrdinátát (ugyanazt a z jelölést a kétféle koordinátára) használni: mind a szokásos Descartes, mind a henger-koordinátás felírásban. Persze a $h = z$ miatt a két változó azonosítható, de itt mi az áttérés, a parciális deriváltak tisztább kezelése érdekében inkább megkülönböztetjük a hengerkoordinátás h értéket, még ha igaz is a $h = z$ azonosság.

Mivel a hengerkoordinátás átalakítás Jacobi determinánsa

$$J_H(r, \varphi, h) = |\det DH(r, \varphi, h)| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial h} \\ frac\partial y\partial r & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = r$$

(ami lényegében a változatlan z mellett a polárkoordinátás áttérésből ismert $J_T(r, \varphi) = r$ érték), így az integrálás átírása, majd ismét a szukcesszív integrálás módszere (Fubini tétel alkalmazása) oda vezet, hogy

$$I_z = \iiint_S r^2 \cdot rdrd\varphi dh = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{r\cos\varphi} r^3\ dh\ d\varphi\ dr = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4 \cos\varphi\ d\varphi\ dr = \int_0^1 2r^4\ dr = \frac{2}{5}.$$

A kétféle úton kapott eredmény egyenlősége egyúttal ellenőrzi is számolásunkat.