Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H — Vizsga feladatsor — K

Dátum: 2016. június 13. Munkaidő: 90 perc

Hallgató neve: Hallgató Neptun kódja: .

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) "Ha $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ konvergens végtelen sorok, akkor a $\sum_k a_k b_k$ Hadamard-szorzat is konvergens."

b.) "Ha egy A mátrix pozitív szemidefinit (de nem pozitív definit), akkor szinguláris."

c.) "Ha egy f függvénynek egy $P \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban van támaszsíkja, akkor az érintősíkja is."

- -

1.) (3 pont) Definiálja komplex változókra is az $E(z) = e^z$ exponenciális függvényt, és bizonyítsa be a (komplex változós) exponenciális függvény $e^{z+w} = e^z e^w$ ú.n. Cauchy-féle függvényegyenletét!

2.) (5 pont) Definiálja egy $L : U \to V$ lineáris leképezés $\ker L$ és $\operatorname{im} L$ magterét és képterét! Igazolja, hogy ezek alterek, és mondja ki az ide vonatkozó dimenzió-tételt!

3.) (5 pont) Sorolja fel az n-dimenziós Riemann-integrál alaptulajdonságait!

- -

4.) (5 pont) Tekintsük a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n}}$ végtelen sort!

a.) Konvergens-e a sor?

b.) Abszolút konvergens-e a sor?

c.) Keressen olyan N küszöbértéket, ameddig elmenve a szummázással, már biztosan legalább két tizedesjegyre jó közelítését kapjuk a végtelen összegnek! (Válaszait indokolja!)

5.) (4 pont) Legyen $\sigma(x) := \sin(x/2)$, ha $|x| \le \pi$, és terjesszük ezt ki 2π-periodikusan $\mathbb{R}$-re.

a.) Fejtse Fourier-sorba a $\sigma(x)$ függvényt!

b.) Állapítsa meg, hol és hová konvergens a függvény Fourier-sora!

6.) (7 pont) Határozza meg az A^{10} mátrix sajátértékeit és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorait, ha $A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$! Diagonalizálható-e az A^{10} mátrix? (Útmutatás: Írjuk A-t $A = 2(I + B)$ alakban, majd számítsuk ki és használjuk fel a B^2, $B^3, \ldots$ hatványokat!)

7.) (7 pont) Tekintsük az $F(x,y,z) = \cos(x+z) + y^2 - e^x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvényt!

a.) Számítsa ki F legjobb első- és másodfokú közelítéseit az $\mathbf{a} := (0,1,0)$ pontban, és írja ezt fel lineáris algebrai alakban!

b.) Van-e támaszsíkja a függvénynek az $\mathbf{a}$ pontban?

8.) (4 pont) Tekintsük a $\phi(x,y) := e^x \mathrm{ch}\, y$ függvényt! Határozza meg a függvény összes érintősíkját illetve támaszegyenesét az $(1,0,e)$ ponton keresztül!

9.) (4 pont) A $z = f(x,y)$ függvény a $\sin(x+y) + \sin(x+z) + \sin(y+z) = 0$ függvényegyenletnek tesz eleget. Számítsa ki a $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ és a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltakat az $\mathbf{p} = (\pi, \pi)$ pontban!

10.) (3 pont) Teljes differenciál-e a $\mathrm{ch}\,(x-z)\; dx + 2xy\; dy - \mathrm{ch}\,(x-z)\; dz$ kifejezés?

11.) (5 pont) Számítsa ki az $I := \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\; (y-2x)^2\; dy\; dx$ kettős integrált! (Útmutatás: Vezesse be az új $u := x+y$, $v := y-2x$ változókat!)

12.) (5 pont) Mennyi az O origótól vett átlagtávolsága a térben a $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; |(x,y,z)| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 1\}$ egységgömb pontjainak?

- -

EMLÉKEZTETŐ: A GÖMBI KOORDINÁTÁK

A térben egy P pont gömbi koordinátái az $r := |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, a P pontnak az xy-síkra vetített merőleges P' vetületének a polárkoordinátákból jól ismert φ irányszöge (azaz az $\overrightarrow{OP'}$ szöge a pozitív x tengely irányával), és a P pont θ "elhajlása", azaz $\overrightarrow{OP}$-nek a pozitív z tengellyel bezárt szöge.

Mivel $|\overrightarrow{OP'}| = \sin\theta |\overrightarrow{OP}|$, a gömbi koordinátákkal kifejezve a a P ponthoz tartozó szokásos derékszögű (x,y,z) koordinátákat, azt kapjuk, hogy $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. Tehát a gömbi koordinátákra való áttérést a $G(r,\varphi,\theta) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ leképezés valósítja meg.

Az áttérés Jacobi determinánsára

$$J_G(r,\varphi,\theta) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial z}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{matrix} \right\|$$

aminek utolsó két oszlopából r-et kiemelve és a determinánst az utolsó sor szerint kifejtve

$$J_G(r,\varphi,\theta) = r^2 \left| \cos\theta \begin{vmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} + (-\sin\theta) \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \right| = r^2\sin\theta.$$

- -

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H – Vizsga feladatok megoldásai – K

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont)

a.) HAMIS. (U.i. pl. ha $a_k = b_k = (-1)^k/\sqrt{k}$, akkor a feltételek teljesülnek, mert a $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ sorok konvergens alternló sorok, de az Hadamard-szorzat a divergens $\sum_k 1/k$ harmonikus sor lesz.)

b.) IGAZ. (A szemidefinitség u.i. azt jelenti, hogy a sajátértékek mind ≥ 0 értékek; de ha nem definit, akkor nem mind > 0, tehát van $\lambda = 0$ sajátérték, és így pl. $\det A = 0$, A szinguláris.)

c.) HAMIS. (Már egy dimenzióban is hamis, ld. pl. $y := |x|$. Pl. a $z = |x|$ függvény z tengely körüli körbeforgatásával – azaz a $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp alakú függvénnyel – kaphatunk ”valódi többváltozós” példát is.)

- -

1.) (3 pont) Amint azt már az A1-ben vettük, $E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$. Ez a sor normálisan, így abszolút és egyenletesen konvergens minden $|z| \leq R$ körlapon (a konvergenciasugara ∞).

Az m-edik hatványok binomiális tétel szerinti felírását és az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzását használva $e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{z^{m-k}}{(m-k)!} \frac{w^k}{k!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{m!} \binom{m}{k} z^{m-k} w^k \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (z+w)^m = e^{z+w}$.

2.) (5 pont) $\ker L := \{\mathbf{u} \in U \ : \ L\mathbf{u} = 0\}$ és $\operatorname{im} L := \{\mathbf{v} \in V \ : \ \exists \mathbf{u} \in U, L\mathbf{u} = \mathbf{v}\} = L(U)$. Vektorterek részhalmazai akkor alkotnak alteret, ha a vektortér műveletek nem vezetnek ki a részhalmazból, azaz az zárt a vektor-műveletekre.

Ezt $\ker L$ esetében az igazolja, hogy L linearitása értelmében $L(a\mathbf{u}) = aL\mathbf{u} = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ($a \in \mathbb{K}, \mathbf{u} \in U$) és $L(\mathbf{u} + \mathbf{u}') = L(\mathbf{u} + \mathbf{u}') = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{u}') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$). A képtérre, ha $\mathbf{v} \in \operatorname{im} L$ és $b \in \mathbb{K}$, akkor $b\mathbf{v} = bL(\mathbf{u}) = L(b\mathbf{u}) \in \operatorname{im} L$ és ha $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \operatorname{im} L$, akkor $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = L\mathbf{u} + L\mathbf{u}' = L(\mathbf{u} + \mathbf{u}') \in \operatorname{im} L$. Tehát $\ker L$, $\operatorname{im} L$ alterek U-ban illetve V-ben.

Lin. leképezések dimenziótétele: Véges dimenziókra $\dim \ker L + \dim \operatorname{im} L = \dim U$.

3.) (5 pont) 0.) normáltság: $\iiint_D 1 d\mathbf{x} = V_{n-1}(D)$
1.) konstanszoros: $\iiint_D cf(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} = c \iiint_D f(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x}$
2.) összeg: $\iiint_D f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} = \iiint_D f(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} + \iiint_D g(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x}$.
3.) majorálás (monotonitás): Ha $f \leq g$ a D-n, akkor $\iiint_D f(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} \leq \iiint_D g(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x}$.
(Ez ekvivalens a pozitivitással: ha $h(x) \geq 0$ a D-n, akkor $\iiint_D h(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} \geq 0$.)
4.) területi (alaphalmazbeli) additivitás: ha $D = A \cup B$ diszjunkt unió, akkor
$\iiint_D f(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} = \iiint_A f(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} + \iiint_B f(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x}$.

- -

4.) (5 pont) **a.)** A sor konvergens, u.i. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$, ami egy alternáló (Leibniz típusú) sor.

b.) Az abszolút konvergencia azt jelentené, hogy itt $\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \infty$, ám ez nem teljesül, mert ez lényegében egy p-harmonikus sor $p = 1/2$-del: pl. a divergens $\sum_k 1/k$ sor minorálja.

c.) A Leibniz típusú sorok általános hibabecslése szerint $|R_N| \leq a_{N+1}$, így olyan N-et keresünk, amelyre $1/\sqrt{N+1} < 0,005$, azaz $\sqrt{N+1} > 200$, $N+1 > 40.000$. Tehát $N = 40.000$ alkalmas küszöbérték.

5.) (4 pont) **a.)** A függvény páratlan, ezért tiszta sin sor lesz. $\pi b_n := \int_{-\pi}^{\pi}\sin(x/2)\sin(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos((n-1/2)x) - \cos((n+1/2)x)\right)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-1/2)x)}{n-1/2} - \frac{\sin((n+1/2)x)}{n+1/2}\right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^{n-1}\frac{2}{2n-1} - (-1)^n\frac{2}{2n+1} = \dfrac{(-1)^{n-1}8n}{4n^2-1}$. Ezért a Fourier-sorfejtés $\sigma(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}8n}{4n^2-1}\sin(nx)$.

b.) Esetünkben σ szakaszonként folytonosan differenciálható $[-\pi,\pi]$-ben, csak éppen $\pm\pi$-ben ugrása (elsőfajú szakadása) van. Az előadáson tanult tétel szerint így a Fourier-sor minden $x \neq \pm\pi$ pontban konvergens $\sigma(x)$-hez, a végpontokban pedig $\frac{1}{2}[\sigma(\pi-0)+\sigma(\pi+0)] = \frac{1}{2}[\sigma(\pi-0)+\sigma(-\pi+0)] = \frac{1}{2}[1+(-1)] = 0$-hoz. (Utóbbi egyébként behelyettesítéssel is látszik, mivel $\sin(n\pi) = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.)

6.) (7 pont) Vegyük észre, hogy

$$A^k = 2^k\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}^k = 2^k\cdot(I+B)^k, \qquad \text{ahol} \qquad B = \begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Összeszorozva látható, hogy $B^2 = \begin{bmatrix}0&0&0&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, $B^m = O$ (nullmátrix) $(m \geq 3)$.

Így a binomiális tétellel kifejtve az $(I+B)^k$ szorzatot (és eközben persze felhasználva, hogy I és B felcserélhetőek), az adódik, hogy $A^k = 2^k(I+kB+\binom{k}{2}B^2+O) = 2^k\begin{bmatrix}1&k&k&k(k-1)\\0&1&0&k\\0&0&1&k\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

Mivel felső háromszög mátrix sajátértékei a főátlóban lévő elemek, egyszerűen adódik, hogy az A^{10} mátrix egyetlen sajátértéke $2^{10} = 1024$.

Az A^{10} és $2^{-10}A^{10}$ mátrixok sajátvektorai megegyeznek, ezért utóbbiakat számoljuk ki a $(2^{-10}A^{10} - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszerből, amelynek együttható mátrixa $k = 10$ mellett $\begin{bmatrix}0&k&k&k(k-1)\\0&0&0&k\\0&0&0&k\\0&0&0&0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&1&1&k-1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

Ebből x_1 értéke tetszőleges, $x_2 = -x_3$ és $x_4 = 0$ adódik, így a sajátvektorok $t\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$ azaz az A^k mátrixnak csak két lineárisan független sajátvektora van, így nem diagonalizálható.

7.) (7 pont) $F(x,y,z) \approx F(\mathbf{a}) + \nabla F(\mathbf{a})\Delta\mathbf{x} + (\Delta\mathbf{x})^T \frac{1}{2} D^{(2)}(F)(\mathbf{a})\Delta\mathbf{x}$, ahol $\Delta\mathbf{x} := (x,y,z) - \mathbf{a} = (x, y-1, z)$ a független változó értékének megváltozása, $\nabla F(\mathbf{a})$ a parciális deriváltakból álló gradiens vektor, és $H = D^{(2)}(F)(\mathbf{a})$ a második derivált vagy Hesse-mátrix.

Ezeket kiszámítva, $F(\mathbf{a}) = F(0,1,0) = 1$,

$$\nabla F(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{a}), \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}), \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{a})\right) = (-\sin(x+z) - e^x|_{\mathbf{a}}, 2y|_{\mathbf{a}}, -\sin(x+z)|_{\mathbf{a}}) = (-1, 2, 0),$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 F}{\partial xy}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 F}{\partial xz}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial xy}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 F}{\partial yz}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial xz}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 F}{\partial yz}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(x+z) - e^x & 0 & -\cos(x+z) \\ 0 & 2 & 0 \\ -\cos(x+z) & 0 & -\cos(x+z) \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Felírva tehát a legjobb lineáris és kvadratikus közelítés formuláit,

$$F(x,y,z) \approx L(x,y,z) = 1 + (-1,2,0)\cdot(x, y-1, z) = 1 - x + 2y - 2 + 0 = -x + 2y - 1$$

a l.j.l.k., és a l.j.k.k.

$$\begin{aligned} F(x,y,z) \approx Q(x,y,z) &= -x + 2y - 1 + (x, y-1, z)\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} \\ &= -x + 2y - 1 + \frac{1}{2}(x, y-1, z)\begin{bmatrix} -2x - z \\ 2y - 2 \\ -x - z \end{bmatrix} \\ &= -x + 2y - 1 + \frac{1}{2}(-2x^2 - xz + 2(y-1)^2 - xz - z^2) \\ &= -x + 2y - 1 - x^2 + (y-1)^2 - xz - \frac{1}{2}z^2 = -x - x^2 + y^2 - xz - \frac{1}{2}z^2. \end{aligned}$$

A függvényre $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$, tehát az $\mathbf{a}$ pontban a kvadratikus közelítés definitsége alapján lehet következtetni a görbülési tulajdonságaira: u.i. az L lineáris közelítés pontosan akkor képez alsó- (felső-) támaszsíkot, ha $F - L$-nek minimuma (maximuma) van az adott $\mathbf{a}$ pontban.

A Hesse mátrix sajátértékeinek kiszámolásához tekintsük a $P_H(\lambda) = \det(H - \lambda I) = (-1)^3 \det(\lambda I - H)$ karakterisztikus polinomot:

$$P_H(\lambda) = -\begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)[\lambda^2 + 3\lambda + 1].$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -3/2 \pm \sqrt{9/4 - 1} = (-3 \pm \sqrt{5})/2$, mely utóbbi gyökök könnyen láthatólag negatívak (itt most az is elegendő, hogy az egyik negatív), így van negatív és pozitív sajátérték is, tehát a kvadratikus alak indefinit, és az $F - L$ függvénynek nyeregpontja van $\mathbf{a}$-ban. Ebből következőleg támaszsíkja sem lesz F-nek az $\mathbf{a}$ pontban.

Úgy is vizsgálhatjuk a kvadratikus alak definitségét, hogy kiszámoljuk főminorait. Esetünben $M_1 := h_{11} = -2 < 0$, $M_2 := \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$ és $M_3 := \det H = 2 > 0$ (ami közvetlenül a második oszlop szerinti kifejtéssel látható), így a Hesse mátrix *indefinit*.

Így is következik, hogy $\mathbf{a}$-ban nyeregpont van, nincsen támaszsík.

8.) (4 pont) Mivel ϕ parciális deriváltjai folytonosak, a függvény differenciálható, így van egy egyértelmű érintősíkja, amelynek egyenlete $z - e = \frac{\partial \phi}{\partial x}|_{(1,0)}(x-1) + \frac{\partial \phi}{\partial y}|_{(1,0)} y = e(x-1) + 0y = ex - e$, azaz $z = ex$.

Differenciálható függvényre az érintősík vagy támaszsík is, és akkor ez az egyetlen támaszsík, vagy egyáltalán nem is létezik támaszsík.

Annak eldöntéséhez, hogy esetünkben az érintősík támaszsík-e, elegendő a sík $(1, 0, e)$ ponton áthaladó egyeneseit megvizsgálni. Legyen $\ell(t) := (1 + at, bt)$, ekkor a kérdés az, hogy $\phi|_\ell \leq, \geq L(t)$, ahol $L(t) = e(1 + at)$ a $z(x, y)$ érintősík megszorítása ℓ-re. Most $\phi(1 + at, bt) = e^{1+at}\mathrm{ch}\,(bt)$ két pozitív és konvex függvény szorzata, így maga is pozitív és konvex, tehát $L(t) \leq \phi(t)$. Mivel ez minden (a, b) irányban így van, az egész érintősík alatta halad a fügvénynek, tehát alsó támaszsík lesz.

Eldönthető a támaszsík kérdése a második derivált kiszámításán keresztül is. A Hesse-mátrix

$$D^{(2)}(\phi)|_{(1,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}|_{(1,0)} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}|_{(1,0)} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}|_{(1,0)} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}|_{(1,0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \mathrm{ch}\, y|_{(1,0)} & e^x \mathrm{sh}\, y|_{(1,0)} \\ e^x \mathrm{sh}\, y|_{(1,0)} & e^x \mathrm{ch}\, y|_{(1,0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} = eI_2,$$

ami nyilvánvalóan pozitív definit és ezért az érintősík a függvény alatt helyezkedik el, azaz alsó támaszsík lesz.

A támaszegyenesek pontosan a támaszsík $(1, 0, e)$ pontján áthaladó egyenesei lesznek.

9.) (4 pont) Először is meghatározzuk, mi a $z_0 = f(\mathbf{p}) = f(\pi, \pi)$ érték. Ez a behelyettesítés szerint a $\sin(2\pi) + \sin(\pi + z) + \sin(\pi + z) = 0$, azaz $\sin z = 0$ egyenletnek tesz eleget, tehát $z_0 = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Tehát végtelen sok megoldás van (ami nem olyan meglepő, tekintve, hogy a sin függvény periódikus). Tehát valamilyen $k \in \mathbb{Z}$ értékkel $f(\mathbf{p}) = z_0 = k\pi$, és a $\mathbf{q} := (\pi, \pi, k\pi)$ ponton halad át az implicit módon megadott $z = f(x, y)$ függvény.

Az implicit egyenlet azt jelenti, hogy az $F(x, y, z) := \sin(x + y) + \sin(x + z) + \sin(y + z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvénybe behelyettesítve a $z = f(x, y)$ függvényt, azonosan nulla függvényt kapunk. (Pontosabban: ha $G(x, y) := (x, y, f(x, y))$, akkor a $H := F \circ G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kompozíciófüggvény azonosan konstans 0.) Így az *implicit alakban megadott függvények deriválásáról szóló tétel értelmében* $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ és $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, tehát ki kell számoljuk F parciális deriváltjait mindegyik változója szerint. Ezt elvégezve,

$$\nabla F = \Big(\cos(x + y) + \cos(x + z), \cos(x + y) + \cos(y + z), \cos(x + z) + \cos(y + z) \Big),$$

tehát $\nabla f = \left(-\frac{\cos(x + y) + \cos(x + z)}{\cos(x + z) + \cos(y + z)}, -\frac{\cos(x + y) + \cos(y + z)}{\cos(x + z) + \cos(y + z)} \right)$,

úgyhogy a $\mathbf{p} = (\pi, \pi)$, $z_0 = k\pi$ értékeket beírva

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \left(-\frac{1 + \cos((k + 1)\pi)}{2\cos((k + 1)\pi)}, -\frac{1 + \cos((k + 1)\pi)}{2\cos((k + 1)\pi)} \right) = \begin{cases} (0, 0) & \text{ha } k = 2n \\ (-1, -1) & \text{ha } k = 2n + 1 \end{cases}.$$

10.) (3 pont) A felírt $Udx + V dy + W dz$ differenciálban szereplő együttható-függvények folytonosan differenciálhatóak, így létezik potenciálfüggvényük akkor és csak akkor, ha a Young tételnek megfelelő kritériumokat – a keresztbe vett parciális deriváltak egyenlőségét – teljesítik. Itt $U'_y = 0$, de $V'_x = 2y$, tehát nem azonosak a keresztbe vett parciális deriváltak, és így a kifejezés nem teljes differenciál (nincsen neki potenciálfügvénye).

11.) (5 pont) Az új $u := x + y$, $v := y - 2x$ változókkal az integrandus egyszerűbb lesz, $\Phi(u, v) = \sqrt{u}v^2$ alakú, de nyomon kell kövessük a tartomány változását és a helyettesítés $(x, y) = T(u, v)$ áttérési függvényének Jacobi determinánsát. Az kívánt $u = u(x, y)$ és $v = v(x, y)$ helyettesítésekkel az áttérési függvény inverze van megadva, de most az u és v segítségével kell kifejezzük (x, y)-t: megoldva az egyenletrendszert, $x = \dfrac{u - v}{3}$, $y = \dfrac{2u + v}{3}$. Innen adódik is az áttérési Jacobi-determináns:

$$J_T(u, v) = \left|\det \begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{vmatrix}\right| = 1/3.$$

Az (x, y) síkban meghatározott integrálási tartomány egy háromszög alakú D tartomány, amelynek a leírása $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$. Beírva az u, v változókat, $0 \le \frac{u-v}{3} \le 1, 0 \le \frac{2u+v}{3} \le 1 - \frac{u-v}{3}$ azaz $v \le u$, $u \le 3 + v$, $v \ge -2u$, $u \le 1$ egyenlőtlenségek adódnak, de ebből az is következik, hogy $u \le 1 \Rightarrow u \le 3 - 2u \le 3 + v$, tehát csak három egyenlet (és így az általuk meghatározott háromszög) lesz az (u, v) pontokra megfelelő E tartomány. Így E leírása $E = T^{-1}(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -2u \le v \le u, \ (0 \le)u \le 1\}$.

Úgy is megkaphatjuk a tartományt, hogy megnézzük a háromszög csúcspontjainak képeit, hiszen a lineáris helyettesítésnél az összekötő egyenesek természetszerűleg az összekötő egyenesekbe képeződnek le. Ezzel a meggondolással az $O = (0, 0)$, az $A = (1, 0)$ és a $B = (0, 1)$ pontok által kifeszített D háromszögre az $E := T^{-1}(D)$ tartomány az $O' = T^{-1}(O) = (0, 0)$, $A' = T^{-1}(A) = (1, -2)$ és $B' = T^{-1}(B) = (1, 1)$ pontok által kifeszített háromszög lesz.

Fubini tételével átalakítva az integrált előbb területi integrállá, majd áttérve a T (lineáris) helyettesítéssel, $I = \iint_E \Phi(u, v) J_T(u.v) \ dudv = \iint_E \sqrt{u}v^2 \frac{1}{3} \ dudv = \int_0^1 \int_{-2u}^u \sqrt{u}v^2 \frac{1}{3} \ dv \ du$, újra Fubinbi szerint áttérve területi integrálról szukcesszív (de más sorrend szerinti) egyszeres integrálásra. A belső integrál értéke $[\frac{1}{9}v^3]_{-2u}^u = \frac{1}{9}(u^3 - (-2u)^3) = u^3$, ezért $I = \int_0^1 u^{7/2} du = [\frac{u^{9/2}}{9/2}]_0^1 = 2/9$.

12.) (5 pont) Lehet "direktben" is próbálkozni, de jobb, ha gömbi koordinátákra térünk át.

Az egységgömb térfogata jól ismert, de ki is számíthatjuk: $V(B) = \iiint 1 \ dxdydz = \iiint_E J_G(r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta$, ahol $J = J_G(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin\theta$ a G leképezés Jacobi-determinánsa (deriváltmátrixa determinánsának abszolút értéke) és E a B egységgömbnek megfelelő koordináta-hármasok a gömbi koordinátákban felírva, azaz $E = \{(r, \varphi, \theta) \ : \ 0 \le r \le 1, \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le \theta \le \pi\} = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Tehát ebből a Fubini tétel alkalmazásával szukcesszív integrálokra áttérve $V(B) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin\theta dr \ d\varphi \ d\theta = 2\pi \int_0^\pi \sin\theta \ d\theta [r^2/3]_0^1 = 4\pi/3$.

A távolságok integrálásához csak annyi változik, hogy most az $\iiint \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ dxdydz$ intergált kell kiszámoljuk, ami gömbi koordinátás áttéréssel tovább $= \iiint_E r J_G(r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sin\theta dr \ d\varphi \ d\theta = 2\pi [\frac{r^4}{4}]_0^1 \int_0^\pi \sin\theta \ d\theta = \pi$.

A távolságok átlaga tehát ennek hányadosa a teljes térfogattal, azaz $3/4$.