Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H — Vizsga feladatsor — M

Vizsga dátuma: 2016. június 13. A 11. FELADAT JAVÍTOTT MEGOLDÁSA

Javítás helytálló hallgatói észrevétel után. Javítás dátuma: 2016. június 19.

11.) (7 pont) A P paralelogrammát az xy síkban az $x = -3$, $x = 0$, $y = x$ és $y = x + 1$ egyenesek határolják. Számítsuk ki az $I := \iint_P \frac{(2x-3y)\,\mathrm{ch}\,(y-x)}{3-4x+4y}\,dxdy$ területi integrált! (Útmutatás: Alkalmazzuk az $u := 2x - 3y$, $v := -x + y$ helyettesítést!)

Megoldás: A javasolt helyettesítéssel $f(x,y) = \frac{(2x-3y)\,\mathrm{ch}\,(y-x)}{3-4x+4y} = \frac{u\,\mathrm{ch}\,v}{4v+3} =: \phi(u,v)$ alakba kerül, ami már kicsit kedvezőbb kinézetű.

A transzformáció egyelőre csak $u(x,y), v(x,y)$ alakban van meg – ebből először is kiszámítjuk a $T(u,v) = (x,y)$ fordított irányú transzformációt. Mivel az $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ összefüggést kell "megfordítani", azaz az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ előállításra van szükségünk, az inverz mátrix kiszámításával oldhatjuk meg a feladatot. (Persze lehet visszahelyettesítgetéssel stb. is.)

Ez szimultán lineáris egyenletrendszert jelent: megoldása Gauss-Jordan eliminációval

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right],$$

azaz $x = -u - 3v$, $y = -u - 2v$, tehát $T(u,v) = (-u - 3v, u - 2v)$. (1+1 pont)

Az áttérés derivált-mátrixa $DT(u,v) = \begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. (Vegyük észre, hogy ez éppen azért konstans, mivel a T transzformáció lineáris). Ezért a Jacobi-determináns $J_T(u,v) = |\det DT(u,v)| = |-1| = 1$. (1 pont)

Meg kell határozzuk azt az E tartományt is az uv síkon, amelyre $T(E) = P$. Tekintve, hogy lineáris transzformációról van szó, egyenesek egyenesekbe mennek át, így elég a határegyenesek megfelelőit megkeresni. $x = -3 \Leftrightarrow -u - 3v = -3$, azaz $v = 1 - u/3$ vagy $u = 3 - 3v$; $x = 0 \Leftrightarrow -u - 3v = 0$, azaz $v = -u/3$ vagy $u = -3v$; $y = x \Leftrightarrow v = 0$ $y = x + 1 \Leftrightarrow v = 1$. Természetesen az ezekkel határolt E tartomány szintén egy paralelogramma lesz, amelynek a csúcsai egyébként az $O = (0,0)$, a $Q = (3,0)$, az $R = (0,1)$ és az $S = (-3,1)$ pontok lesznek. (1 pont)

Az integrálban az áttérés után Fubini tételét alkalmazva úgy, hogy belül u, majd kívül v szerint integráljunk, adódik $I := \iint_P \frac{(2x-3y)\,\mathrm{ch}\,(y-x)}{3-4x+4y}\,dxdy = \iint_E \phi(u,v) J_T(u,v)\,dudv =$

$\iint_E \dfrac{u \operatorname{ch} v}{4v+3}\, 1\, dudv$ (1 pont) $= \int_0^1 \left(\dfrac{1}{4v+3} \dfrac{\operatorname{ch} v}{} \int_{-3v}^{3-3v} u\, du \right) dv$ (1 pont) $= \int_0^1 \dfrac{1}{4v+3} \dfrac{\operatorname{ch} v}{} \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-3v}^{3-3v} dv =$ $\int_0^1 \dfrac{\operatorname{ch} v}{4v+3} \cdot \frac{1}{2} \left((3-3v)^2 - (3v)^2 \right) dv = \int_0^1 \dfrac{\operatorname{ch} v}{4v+3} \cdot \frac{1}{2} (-18v+9)\ dv$ (1 pont).

Ez még tovább írható, mint $I = -\frac{9}{2} \int_0^1 \operatorname{ch} v\ dv + \dfrac{63}{2} \int_0^1 \dfrac{\operatorname{ch} v}{4v+3}\ dv$, de ebből sem látszik a kiszámítás további lehetősége. A megoldással az a probléma, hogy csak az első integrálnak van explicit primitív függvénye, t.i. $\operatorname{sh} v$, a másodiknak nincsen. Így az első integrál értéke $-\frac{9}{2}[\operatorname{sh} v]_0^1 = -\frac{9}{2}\operatorname{sh} v$, de a második kiszámítása sokkal nehezebb.

Először is alkalmazzuk a $\operatorname{ch}(\alpha - \beta) = \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\beta$ azonosságot $\alpha := v + 3/4$ és $\beta = 3/4$ értékekkel, hogy megkapjuk $\operatorname{ch} v = \operatorname{ch}(3/4)\operatorname{ch}(v+3/4) - \operatorname{sh}(3/4)\operatorname{sh}(v+3/4)$, majd írjuk fel, hogy $\dfrac{63}{2} \int_0^1 \dfrac{\operatorname{ch} v}{4v+3}\ dv = \dfrac{63}{8} \operatorname{ch}(3/4) \int_0^1 \dfrac{\operatorname{ch}(v+3/4)}{v+3/4}\ dv - \dfrac{63}{8} \operatorname{sh}(3/4) \int_0^1 \dfrac{\operatorname{sh}(v+3/4)}{v+3/4}\ dv$. Ebből $z := v + 3/4$ helyettesítés után az derül ki, hogy a $J := \int_{3/4}^{7/4} \dfrac{\operatorname{ch} z}{z}\ dz$ és a $H := \int_{3/4}^{7/4} \dfrac{\operatorname{sh} z}{z}\ dz$ integrálokat kellene kiszámítani, ami csak hatványsorfejtéssel végezhető el.

$J = \int_{3/4}^{7/4} \dfrac{1}{z}\ dz + \int_{3/4}^{7/4} \dfrac{\operatorname{ch} z - 1}{z}\ dz = [\log z]_{3/4}^{7/4} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)!} \int_{3/4}^{7/4} z^{2n-1}\ dz = \log(7/3) + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n\ (2n)!} [z^{2n}]_{3/4}^{7/4} = \log(7/3) + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n\ (2n)!} (7/4)^{2n} - (3/4)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^{2n} - 3^{2n}}{4^n\ 2n\ (2n)!}$.

Hasonlóan, $H = \int_{3/4}^{7/4} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!} z^{2n}\ dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{3/4}^{7/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{7^{2n+1} - 3^{2n+1}}{4^{2n+1}\ (2n+1)(2n+1)!}$.

Ezek a tagonkénti integrálások azért végezhetőek el, mert a $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ függvények hatványsorainak konvergencia-sugara végtelen, így az egész komplex síkon minden véges körben - így a $[3/4, 7/4]$ intervallumon is - abszolút és egyenletesen konverensek.

A végeredmény tehát $-\dfrac{9}{2}\operatorname{sh} 1 + \dfrac{63}{8} \operatorname{ch}(3/4) \log(7/3) + \dfrac{63}{8} \operatorname{ch}(3/4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^{2n} - 3^{2n}}{4^n\ 2n\ (2n)!} - \dfrac{63}{8} \operatorname{sh}(3/4) \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{7^{2n+1} - 3^{2n+1}}{4^{2n+1}\ (2n+1)(2n+1)!}$.

Azért lett az eredmény ennyire bonyolult, mert a feladat kitűzésekor elnéztem a feladatot (hibát követtem el a megoldásban). A szándékolt kitűzés olyan alakú lett volna, hogy a számlálóban (szorzóban) fellépő kifejezés, ami u^2 megváltozásából adódik, pontosan a nevezőben levő lineáris kifejezés többszöröse legyen, és ezek egyszerűsödjenek – de így sajnos nem egyszerűsödött a kifejezés.

Pl. ha a kitűzés az eredeti szándéknak megfelelve $I := \iint_P \dfrac{(2x - 3y - 7,5)\ \operatorname{ch}(y - x)}{2y - 4x + 1}\ dxdy$ lett volna mondjuk, akkor a fenti gondolatmenettel $I = \int_0^1 \dfrac{\operatorname{ch} v}{4v+3} \cdot \frac{1}{2} (-18v + 9 + 3 \cdot (-7,5))\ dv = \int_0^1 \dfrac{\operatorname{ch} v}{4v+3} \cdot \frac{1}{2} (-18v - 13,5)\ dv = -\dfrac{9}{4} \int_0^1 \operatorname{ch} v\ dv = -\dfrac{9}{4} \operatorname{sh} 1$ jönne ki, ami egy könnyű feladat.

A vizsga időkorlátai mellett nem várható el egyetlen feladat ilyen időigényes kidolgozása. Ezért mindenki, aki eljutott az integrálok helyes felírásáig, elvégezte az u szerinti integrálást, és megkapta legalább az $\int_0^1 \dfrac{\operatorname{ch} v}{4v+3} \cdot \frac{1}{2} (-18v + 9)\ dv$ alakot, az meg kell kapja a teljes megoldásért járó 7 pontot. Az így elérhető részpontszámok lebontását a fenti megoldási útmutató tükrözi.