Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - Pót-II. Zh. V csoport / feladatsor

Dátum: 2016. május 11. Munkaidő: 45 perc

Hallgató Neptun kódja és neve: Gyakorlatvezető: .

1.) (2 pont: 3 jó válasz 2 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) Ha A és B szinguláris mátrixok, akkor AB és $A+B$ is szinguláris mátrixok.

b.) Egy M $n \times n$-es nem-szinguláris mátrixnak legalább n nemzérus eleme kell legyen.

c.) Minden $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációnak létezik sajátvektora.

2.) (4 pont) Válassza ki az általuk generált V altér egy bázisát a

. $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektorokból!

3.) (4 pont) Tekintsük a $\mathcal{Q} = \{ax^2 + bx + c \ : \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ (kvadratikus polinomok) vektorterét, és ebben az $H : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, $p(x) \mapsto p(2x)$ leképezést. Határozza meg a leképezés sajátértékeit és azokhoz tartozó sajátvektorait (sajátfüggvényeit)!

4.) (5 pont) Legyenek $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -6 & -3 \\ -1 & -7 & -3 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a.) Invertálja az A mátrixot! **b.)** Oldja meg az $AX = B$ mátrix-egyenletet!

5.) (5 pont) Hol van szakadása a $K(x, y) = \dfrac{\cos x - \cos y}{e^x - e^y}$ függvénynek? Megszüntethető-e a szakadás?

Az alábbi értékelési táblázatot a gyakorlatvezető tölti ki!

1. feladat	2. feladat	3. feladat	4. feladat	5. feladat	Összesen

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - Pót-II. Zh. — Megoldások — V csoport

1.) (2 pont) **a.)** HAMIS. (AB ugyan szinguláris, de $A+B$ nem mindig: pl. ha $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ és $B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ akkor ezek ugyan szingulárisak, de $A+B=I$.)

1.) **b.)** IGAZ. (Ha u.i. kevesebb volna, akkor a determináns definíciójában szereplő n-tényezős szorzatok tényezői között valamelyik mindig 0 lenne, tehát az egész determináns is 0 – vagy, másként, akkor volna olyan oszlop, amelyik csupa 0 volna, és ezért a determináns is eltűnne.)

1.) **c.)** HAMIS. (Csak $\mathbb{C}$-ben igaz ez - valósban lehetséges, hogy a karakterisztikus polinom pl. λ^2+1, és ekkor már valós sajátérték sincsen.)

2.) (4 pont) A vektorok által generált V altér bázisai azok a részrendszerek lesznek, amelyek lineárisan független vektorokból állnak, de még generálják az egész V-t, azaz maximális elemszámú ilyen (lin. fgtlen.) részrendszert alkotnak.

Ha a vektorok között van három lineárisan független, úgy generátumuk már kiadja az egész $\mathbb{R}^3$ teret (mert az egész térnek is csak 3 a dimenziója). Azaz további lineárisan független vektor már az egész $\mathbb{R}^3$ térből sem található, $V=\mathbb{R}^3$ és a talált három vektor bázisa V-nek (és egyben $\mathbb{R}^3$-nak). Így elegendő tetszőleges három lineárisan független elemet találni, és az már bázis – maximális lineárisan független rendszer – lesz.

A legegyszerűbb pl. az első, a második és a negyedik vektort használni, mert ezekből, mint oszlopokból mátrixot képezve a keletkező $\begin{bmatrix}0&7&5\\2&0&-2\\4&0&0\end{bmatrix}$ mátrix rangja nyilván 3, mert nem-szinguláris, hisz a determinánsa $4\cdot\begin{vmatrix}7&5\\0&-2\end{vmatrix}=4\cdot(-14)\neq 0$.

Sokféleképpen lehet érvelni, pl. úgy is, hogy az összes oszlopból képzett 3×5-ös mátrix rangját keressük, ami a négyzetes és nemszinguláris részmátrixok maximális mérete: ez is maximum 3 lehet, (mert ennél nagyobb méretű négyzetes mátrix nem is létezik), akkora meg van, ld. mint fentebb.

Lehet a sorok lineáris függetlenségét is látni: ha u.i. $a\mathbf{s}_1+b\mathbf{s}_2+c\mathbf{s}_3=0$, akkor a 2. oszlop miatt $a=0$, de akkor a 4. oszlop miatt $b=0$, és akkor pl. az első oszlop miatt $c=0$ is adódik.

3.) (4 pont) $\mathcal{Q}$ dimenziója 3, ebben egy bázis az $1, x, x^2$ rendszer, és ezeknek a báziselemeknek a képe rendre 1, $2x$, $4x^2$, tehát ezek sajátvektorok 1, 2 és 4 sajátértékkel.

4.) (5 pont)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_2+S_1,\, S_3+S_1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_1+2S_2,\, S_2-S_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_3+3S_2,\, (-1)\cdot S_3}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right].$$

Ebből $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$.

5.) (5 pont) A függvény mindenütt értelmezve van és folytonos is, ahol a nevező nem nulla, azaz $\mathcal{D}_K = \mathbb{R}^2 \setminus \ell$, ahol ℓ az $y = x$ egyenletű egyenes, mivel $e^x - e^y = 0 \Leftrightarrow x = y$, hiszen az exponenciális függvény szigorúan monoton, injektív. Tehát a függvénynek az ℓ egyenes pontjaiban van szakadása.

Legyen $P \in \ell$, tehát $P = (a, a)$ alakú adott pont! Itt megszüntethető a szakadás pontosan akkor, ha van a függvénynek limesze ebben a pontban. Ez a limesz létezik, hiszen *Cauchy középérték-tétele miatt* ha $x - y \neq 0$, akkor $K(x, y) = \frac{\sin\xi}{e^\xi}$ valamilyen x és y közti ξ értékkel. Erre tehát $\xi \to a$ és így $K(x, y) \to \frac{\sin a}{e^a}$, ha $(x, y) \to P$. Ha tehát az ℓ egyenes P pontjaiban így értelmezzük a függvény kiterjesztését, akkor $\mathcal{D}_K$-ból közelítve P-t, a függvényérték megegyezik a határértékkel: magáról az ℓ egyenesről pedig látszik, hogy ott a kiterjesztési definíció folytonos, tehát végül is $\lim_{(x,y)\to P} = \frac{\sin a}{e^a}$ teljesül és a kiterjesztés folytonos, a szakadások megszüntethetőek.

A Cauchy k.é.t. helyett (mind a számláló, mind a nevező $\frac{1}{x-y}$-nal való elosztása után) lehet Lagrange k.é.t.-lel is számolni ill. érvelni, de akkor vigyázni kell, hogy első lépésben $K(x, y) = \frac{\sin\xi}{e^\eta}$ alakú lesz, ami persze $\xi, \eta \to a$ miatt ugyanoda tart, mint előbb.