Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - Nem-szinguláris mátrixok Kiadva: 2016.ápr.20.

Tétel. *Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (vagy $\mathbb{C}^{n\times n}$) mátrixra ekvivalensek az alábbiak.*

1. A nem-szinguláris mátrix.
2. $\exists R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (vagy $\mathbb{C}^{n\times n}$) baloldali reciprok-mátrix A-hoz, amelyre tehát $RA = I_n$.
3. $\exists S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (vagy $\mathbb{C}^{n\times n}$) jobboldali reciprok-mátrix A-hoz, amelyre tehát $AS = I_n$.
4. $\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (vagy $\mathbb{C}^{n\times n}$) *inverz mátrix*, amelyre $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.
5. A oszlopai (az $\mathbf{a_{*j}}$ oszlopvektorok, $j = 1, \ldots, n$) lineárisan függetlenek.
6. A oszlopai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben ($\mathbb{C}^n$-ben).
7. A oszlopai generátor-rendszer $\mathbb{R}^n$-ben ($\mathbb{C}^n$-ben).
8. A oszloptere, $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).
9. Az $L : \mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ lineáris leképezés képtere $\mathcal{R}(A) = \mathrm{Im}\ A$ az egész $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).
10. Az $L : \mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ lin. leképezés szürjektív ($\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), hogy $L\mathbf{x} = \mathbf{z}$).
11. Az $L : \mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ lineáris leképezés magtere, $\mathcal{N}(A) = \mathrm{Ker}\ L$ a 0-dimenziós $\{\mathbf{0}\}$ altér.
12. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak $\mathcal{M}_h$ halmaza $\{\mathbf{0}\}$.
13. Az $L : \mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ lineáris leképezés injektív (ha $L\mathbf{x} = L\mathbf{y}$, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{y}$).
14. Tetszőleges $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ (vagy $\mathbb{C}^n$) vektorra az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható.
15. Tetszőleges $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ (vagy $\mathbb{C}^n$) vektorra az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egy.rsz.nek $\exists!$ megoldása.
16. $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ (vagy $\mathbb{C}^n$) vektorra az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lin.egy.rsz.nek legfeljebb egy megoldása van.
17. A sorai (az $\mathbf{a_{i*}}$ sorvektorok, $i = 1, \ldots, n$) lineárisan függetlenek.
18. A sorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben ($\mathbb{C}^n$-ben).
19. A sorai generátor-rendszer $\mathbb{R}^n$-ben ($\mathbb{C}^n$-ben).
20. A sortere, $\mathcal{S}(A) = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).
21. A sortere, $\mathcal{S}(A)$, csak a $\mathbf{0}$ vektorra merőleges: $\mathcal{S}(A)^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
22. Fennáll, hogy az $\mathcal{N}(A) = \mathcal{M}_h = \mathrm{Ker}A = \mathcal{S}(A)^\perp$ altér a 0-dimenziós $\{\mathbf{0}\}$ altér.
23. Az A mátrix rangja, $r(A) = n$.
24. Az A mátrix minden lépcsős alakjában is n sor van (nincsenek eldobható csupa 0 sorok).

25. Az A mátrix minden lépcsős alakjában n db. nem-nulla vezérelem található: $v(A) = n$.
26. Az A mátrix minden lépcsős alakjában a található szabad változók száma $f(A) = 0$.
27. Az A mátrix redukált lépcsős alakja, r.r.e.f.(A), n sorból áll ($\nexists$ csupa 0 sor).
28. Az A mátrix redukált lépcsős alakja r.r.e.f.$(A) = I_n$.
29. Az A mátrix sor-ekvivalens az I_n egységmátrixszal.
30. Az $[A|I_n]$ kibővített együttható-mátrixú szimultán lin.egy.rsz.-család megoldható.
31. Az $[A|B]$ kibővített együttható-mátrixú szimultán lineáris egyenletrendszer-család megoldható tetszőleges $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ ($\mathbb{C}^{n\times k}$) jobboldal esetén.
32. Az $AX = I_n$ mátrix-egyenletnek van megoldása.
33. Az $YA = I_n$ mátrix-egyenletnek van megoldása.
34. Az $AX = B$ mátrix-egyenletnek van megoldása $\forall B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ ($\mathbb{C}^{n\times k}$) jobboldal esetén.
35. Az $YA = B$ mátrix-egyenletnek van megoldása $\forall B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$) jobboldal esetén.
36. Ha egy C négyzetes mátrixra $CA = O$ (nulla-mátrix), akkor $C = O$.
37. Ha egy D négyzetes mátrixra $AD = O$ (nulla-mátrix), akkor $D = O$.
38. Ha egy C mátrixra CA-nak van csupa 0 sora, akkor C megfelelő sora is csupa 0 sor.
39. Ha egy C négyzetes mátrixra CA-nak van csupa 0 sora, akkor C szinguláris mátrix.
40. Ha egy C négyzetes mátrixra CA-nak van csupa 0 oszlopa, akkor C szinguláris mátrix.
41. Ha egy D mátrixra AD-nek van csupa 0 oszlopa, akkor D megfelelő oszlopa a $\mathbf{0}$ vektor.
42. Ha egy D mátrixra AD-nek van csupa 0 oszlopa, akkor D szinguláris mátrix.
43. Ha egy D négyzetes mátrixra AD-nek van csupa 0 sora, akkor D szinguláris mátrix.
44. Ha egy C négyzetes mátrixra CA szinguláris, akkor C is szinguláris.
45. Ha egy D négyzetes mátrixra AD szinguláris, akkor D is szinguláris.
46. Bármely m-re és $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (vagy $\mathbb{C}^{m\times n}$) mátrixra $r(CA) = r(C)$.
47. Bármely k-ra és $D \in \mathbb{R}^{n\times k}$ (vagy $\mathbb{C}^{n\times k}$) mátrixra $r(AD) = r(D)$.
48. Az A mátrix determinánsa $\det A = |A| \neq 0$.
49. A 0 szám nem sajátértéke az A mátrixnak.
50. Az A mátrix $P(\lambda)$ karakterisztikus polinomjának a $\lambda_0 = 0$ érték nem gyöke.
51. Az A mátrix $P(\lambda)$ karakterisztikus polinomjában a konstans tag nem nulla.
52. Az A mátrix $P(\lambda)$ karakterisztikus polinomjából nem emelhető ki a λ tényező.
53. Az A^T mátrix nem-szinguláris (és a megfelelő 1-52 állítások A^T-ra u.úgy fennállnak).