Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H — Vizsga feladatsor — H

Dátum: 2016. június 3. Munkaidő: 90 perc

Hallgató neve: Hallgató Neptun kódja: .

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) "Egy $\sum_k a_k$ sor tetszőleges sorrendben átrendezve is mindig konvergens marad pontosan akkor, ha abszolút konvergens."

b.) "Ha $\lambda_0 = 4$ az $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix karakterisztikus polinomjának 4-szeres gyöke, és $A = A^T$, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineáris egyenlet megoldásai négydimenziós alteret alkotnak."

c.) "Egy $f \in C^2(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ függvény adott pontbeli Jacobi-mátrixa (derivált-mátrixa) mindig ortogonális transzformációval diagonalizálható."

1.) (3 pont) Hogyan definiáljuk egy $f \in R[0, 2\pi]$ Riemann-integrálható függvény Fourier-sorát? Milyen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények vizsgálatában hasznos a Fourier-sor használata?

2.) (3 pont) Mikor nevezünk egy kvadratikus alakot negatív definitnek? Hogyan jellemezhetjük ezt a tulajdonságot a mátrix sajátértékeivel? És a mátrix aldeterminánsaival?

3.) (6 pont) Hogyan értelmezzük egy Jordan-mérhető $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett korlátos $f(\mathbf{x})$ függvény Riemann-integrálját? Adja meg mind a három ekvivalens értelmezést abban az esetben, ha $f \geq 0$!

- -

4.) (4 pont) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n^2 - 2^n n^3}{4^n n - n^4}$ numerikus sor? Válaszát indokolja!

5.) (5 pont) **a.)** Írja fel $\ln(0,6)$ értékét $L(x) := \ln(1-x)$ Maclaurin-sorának segítségével!

b.) Találjon olyan küszöbszámot, ameddig kiszámolva a sort, az eredmény már legalább 2 tizedes pontossággal jó közelítést ad!

6.) (5 pont) Legyenek $p(x) := 1 - 3x^2$, $q(x) := 1 + 2x^3$, $r(x) := 1 - 2x + x^2 + x^3$, $s(x) := 1 + 3x$. Kifeszítik-e ezek a polinomok a legfeljebb harmadfokú polinomok $\mathcal{P}_3$ terét?

7.) (9 pont) Határozza meg az $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorait! Írja fel a diagonális alakot, ha A diagonalizálható!

8.) (3 pont) Tekintsük az $F(x,y,z) = (\cos(x+z), xy+zx, y^2+e^x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt! Ekkor az $\mathbf{a} := (0,2,0)$ pont képe a $\mathbf{b} := F(\mathbf{a}) = (1,0,5)$ pont lesz. Invertálható-e differenciálható módon az F függvény a $\mathbf{b}$ pont egy környezetében? Ha nem, indokolja, miért nem, és ha igen, akkor határozza meg a $G := F^{-1}$ függvény $\mathbf{b}$ körüli legjobb lineáris közelítését!

9.) (6 pont) Határozza meg a $\nu(x,y,z) := x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{8}{y} + z - 4\sqrt{z}$ függvény szélsőértékhelyeit és azok jellegét!

10.) (3 pont) Teljes differenciál-e a $(\cos xe^{y+z} + z)\, dx + \sin xe^{y+z}\, dy + (\sin xe^{y+z} + x)\, dz$ kifejezés?

11.) (3 pont) Számítsa ki az $I := \displaystyle\iiint_K \cos(x+2y+3z)(e^{x^2} + \operatorname{sh}\sqrt{z})\, dxdydz$ hármasintegrált, ahol a K halmaz a $[0,\pi]^3$ kocka!

12.) (7 pont) Egy $R = 26$ cm sugarú – közel gömb alakú – görödgdinnyébe egyenes kúp alakú L léket vágunk úgy, hogy annak csúcsa a D dinnye közepébe érjen. Hányadrészét teszi ki a lék térfogata az egész dinnyéének, ha a kúpnak a gömb héjánál $\ell = 10$ cm a sugara?
(Útmutatás: Használjuk az $(x,y,z) = G(r,\varphi,\theta) := (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ gömbi koordinátákra való áttérést!)

\- -

EMLÉKEZTETŐ: A GÖMBI KOORDINÁTÁK

A térben egy P pont gömbi koordinátái az $r := |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, a P pontnak az xy-síkra vetített merőleges P' vetületének a polárkoordinátákból jól ismert φ irányszöge (azaz az $\overrightarrow{OP'}$ szöge a pozitív x tengely irányával), és a P pont θ "elhajlása", azaz $\overrightarrow{OP}$-nek a pozitív z tengellyel bezárt szöge.

Mivel $|\overrightarrow{OP'}| = \sin\theta|\overrightarrow{OP}|$, a gömbi koordinátákkal kifejezve a a P ponthoz tartozó szokásos derékszögű (x,y,z) koordinátákat, azt kapjuk, hogy $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. Tehát a gömbi koordinátákra való áttérést a $G(r,\varphi,\theta) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ leképezés valósítja meg.

Az áttérés Jacobi determinánsára

$$J_G(r,\varphi,\theta) = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial z}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix}\right|$$

aminek utolsó két oszlopából r-et kiemelve és a determinánst az utolsó sor szerint kifejtve

$$J_G(r,\varphi,\theta) = r^2 \left| \cos\theta \begin{vmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} + (-\sin\theta) \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \right| = r^2\sin\theta.$$

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H – Vizsga feladatok megoldásai – H

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) "Egy $\sum_k a_k$ sor tetszőleges sorrendben átrendezve is mindig konvergens marad pontosan akkor, ha abszolút konvergens."

IGAZ (Lényegében ezt mondja ki Rieman tétele, azzal a többlettel, hogy ilyenkor a végtelen összeg értéke is ugyanaz marad minden átrendezés mellett.)

b.) "Ha $\lambda_0 = 4$ az $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix karakterisztikus polinomjának 4-szeres gyöke, és $A = A^T$, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineáris egyenlet megoldásai négydimenziós alteret alkotnak."

HAMIS (U.i. ha $\lambda = 4$ 4-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor $\lambda = 0$ egyáltalán nem gyöke, és így az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek sincs gyöke a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$-on kívül.)

c.) "Egy $f \in C^2(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ függvény adott pontbeli Jacobi-mátrixa (derivált-mátrixa) mindig ortogonális transzformációval diagonalizálható."

HAMIS (Egy A mátrix ortogonális transzformációval diagonalizálható pontosan akkor, ha A szimmetrikus: márpedig a Jacobi mátrix nem szükségképpen szimmetrikus, hiszen pl. semmi különös ok nincsen arra, hogy egy $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezésre $\partial F_1/\partial x_2 = \partial F_2/\partial x_1$ álljon fenn. F_1 és F_2 egymástól függetlenül tetszőlegesen megválasztható, pl. lehet $F_1 = x_1$, $F_2 = x_1^2$, és akkor $\partial F_1/\partial x_2 = 0$, $\partial F_2/\partial x_1 = 2x_1$ különbözőek.)

\- -

1.) (3 pont) Hogyan definiáljuk egy $f \in R[0, 2\pi]$ Riemann-integrálható függvény Fourier-sorát? Milyen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények vizsgálatában hasznos a Fourier-sor használata?

A sor definiálását az együtthatók értelmezésével kezdjük: $a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, és $n \geq 1$-re $a_n := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$, $b_n := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$: ezekkel az együtthatókkal pedig f Fourier-sora a formálisan felírt $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ sor.

A Fourier-sorok leginkább a periodikus függvények (pl. a fizikában a hullám-jelenségek) vizsgálatában hasznosak.

2.) (3 pont) Mikor nevezünk egy kvadratikus alakot negatív definitnek? Hogyan jellemezhetjük ezt a tulajdonságot a mátrix sajátértékeivel? És a mátrix aldeterminánsaival?

Az A szimmetrikus mátrixszal értelmezett $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ kvadratikus alak *negatív definit*, jelben $A \ll 0$, ha $\forall\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$.

Ez a tulajdonság ekvivalens azzal, hogy A összes sajátértéke negatív.

Ugyancsak ekvivalens kritérium, hogy A összes főminora – azaz a bal felső $k \times k$-as almátrixainak M_k determinánsa – a $(-1)^k M_k > 0$ feltételnek tesz eleget $\forall\ k = 1, \ldots, n$-re.

3.) (6 pont) Hogyan értelmezzük egy Jordan-mérhető $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett korlátos $f(\mathbf{x})$ függvény Riemann-integrálját? Adja meg mind a három ekvivalens értelmezést abban az esetben, ha $f \geq 0$!

Megoldás: Legyen az f függvény gráfja alatti halmaz $A_f := \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \mathbf{x} \in H \text{ és } 0 \leq y \leq f(\mathbf{x})\}$. A Riemann-integrál egyik értelmezése szerint $\iiint_H f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = V_{n+1}(A_f)$, ahol V_{n+1} az $n+1$ dimenziós Jordan-térfogat.

Továbbá jelölje Q_j $(j = 1, \ldots, m)$ a H halmaz egy tetszőleges beírt (n-dimenziós) tégla-felosztását és R_j $(j = 1, \ldots, m)$ a H halmaz egy tetszőleges (n-dimenziós) tégla-lefedését. Az $s(Q) := \sum_{j=1}^{m} \inf_{Q_j} f \ V_n(Q_j)$ összegeket alsó közelítő Riemann-összegeknek, az $S(R) := \sum_{j=1}^{m} \sup_{R_j} f \ V_n(R_j)$ összegeket pedig felső közelítő Riemann-összegeknek nevezzük. Ekkor f alsó- illetve felső- Riemann-integrálja a H halmazon az $\iiint_\star(f) := \sup_Q s(Q)$ és $\iiint^\star(f) := \inf_R S(R)$ értékek: az integrál pedig definíció szerint pontosan akkor létezik, ha ezek megegyeznek, és ekkor $\iiint_H f := \iiint_\star(f) = \iiint^\star(f)$.

Végül, vehetjük a H halmaz összes téglaráccsal való $R \sim R_1, \ldots, R_m$ felbontását, és tetszőleges R_j felosztási téglákra tetszőleges $\mathbf{x}_j \in R_j$ elemeket. Az ehhez az R felosztáshoz és $X \sim \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ mintavételi pontokhoz tartozó Riemann-féle integrál közelítő összeg $S(R, X) := \sum_{j=1}^{m} f(\mathbf{x}_j)V_n(R_j)$. Ha létezik olyan $I \in \mathbb{R}$ véges érték, hogy $\lim_{\delta(R)\to 0} S(R, X) = I$ – ahol itt $\delta(R)$ a felosztás "finomsága": $\delta(R) := \max_{j=1,\ldots,m} d(R_j)$, ahol $d(A)$ az A halmaz átmérőjét jelöli – akkor azt mondjuk, hogy $f \in \mathcal{R}(H)$ és $\iiint_H f = I$.

- -

4.) (4 pont) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n^2 - 2^n n^3}{4^n n - n^4}$ numerikus sor? Válaszát indokolja!

Megoldás: Az ú.n. speciális összehasonlító kritérium, vagy más néven határérték-teszt segítségével dolgozunk: összehasonlítjuk az adott $\sum_n a_n$ sort a $\sum_n b_n$ sorral, ahol $b_n = n(3/4)^n$ a sorunk "fő része". Ekkor $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - n(2/3)^n}{1 - n^3/4^n} = 1$, tehát véges nem nulla határérték van, és, mivel $a_n, b_n \geq 0$, a teszt alkalmazható: a két sor ekvikonvergens.

A $\sum_n b_n$ sor viszont konvergens. Konkrétan ezt tanultuk is: $\sum_n nz^n = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ konvergens az $|z| < 1$ körben, így a $z = 3/4$ pontban is (l.d. 2.1. Következmény a jegyzetben).

De a konvergenciát a gyökkritériummal vagy a hányadoskritériummal is könnyen láthatjuk.

Lehet direkt megoldást is adni az a_n tagok majorizálásával, azt felhasználva, hogy az exponenciális függvény minden hatványnál gyorsabban nő (illetve csökken) ha az alap > 1 (illetve < 1). A sor tagjainak becsléséhez elegendően nagy n-re pl. írhatjuk, hogy $a_n < \frac{3^n n^2}{4^n n - n^4} < \frac{3^n n^2}{4^n n/2} < n(3/4)^n < 1/n^2$, ami még mindig konvergens sort ad.

5.) a.) (5 pont) Írja fel $\ln(0,6)$ értékét $L(x) := \ln(1-x)$ Maclaurin-sorának segítségével!

b.) Találjon olyan küszöbszámot, ameddig kiszámolva a sort, az eredmény már legalább 2 tizedes pontossággal jó közelítést ad!

Megoldás: $L(x) := \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ a függvény Maclaurin-sora. Az $x = 0,4$ behelyettesítéssel az $\ln 0,6 = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{0,4^n}{n}$ sort kapjuk. Az N-edik részletösszeg hibájára $|S - S_N| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{0,4^n}{n} < \dfrac{0,4^{N+1}}{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} 0,4^k = \dfrac{0,4^{N+1}}{N+1} \dfrac{1}{1-0,4} = \dfrac{4^{N+1}}{(N+1)\ 6\ 10^N}$ egy jó hibabecslés. (Ennél rosszabbat kapunk, ha a Lagrange-féle maradéktaggal számolunk.)

A hiba kisebb lesz, mint $0,005$, ha $4^{N+1} \cdot 200 < 6(N+1)10^N$, ami leghamarabb $N = 4$-re teljesül is: ekkor u.i. $4^5 \ 200 < 6 \cdot 5 \cdot 10^4 \Leftrightarrow 2^{10} < 15 \ 10^2 = 1500$, és ez igaz, tekintve, hogy $2^{10} = 1024$.

Nem volt kötelező, de ennek alapján ki lehet számítani, hogy 2 tizedesjegyre pontos értéket ad a $-\ln(0,6) \approx 0,4 + 0,4^2/2 + 0,4^3/3 + 0,4^4/4 = 0,4 + 0,08 + 0,064/3 + 0,0064 \approx 0,4000 + 0,0800 + 0,02133 + 0,0064 = 0,50773 \approx 0,51$ érték. (A számítógép $-0,51083$-at ad.)

A Lagrange-féle maradéktaggal számolva a hiba $|S - S_n| = \frac{1}{(n+1)!}\left|\ln^{(n+1)}(1-\xi)x^{n+1}\right| = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n!}{(1-\xi)^n}x^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\frac{0,4^{n+1}}{(1-0,4)^n} = \frac{0,4}{n+1}(\frac{2}{3})^n$. Ezzel a becsléssel el kell menni $n = 7$-ig ($n = 6$-ra a hibabecslés számítógép szerinti értéke pont $0,00502... > 0,005$ még): $n = 7$-re viszont már $\frac{0,4}{8}(\frac{2}{3})^7 = \frac{1}{30}(\frac{2}{3})^6 = \frac{1}{30}\left(\frac{8}{27}\right)^2 < \frac{1}{30}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{270} < \frac{1}{200} = 0,005$.

(A kiszámításnál tekintetbe véve a további $n = 5, 6, 7$-hez tartozó kifejezéseket is: ezek $0,4^5/5 + 0,4^6/6 + 0,4^7/7 = 1024 \cdot 10^{-5}\{1/5 + 0,2/3 + 0,16/7\} = 1024 \cdot 10^{-5}\{0,2 + 0,06666\cdots + 0,02857\ldots\} = 0,01024 \cdot 0,2952\cdots = 0,002952\cdots + \varepsilon$, ahol $\varepsilon < 0,00024 \cdot 0,3 < 0,00008$, és így az összeadott tagok értéke kb. $0,00296$. Ezt összeadva az első öt tagra kiszámolt $0,50773$ értékkel adódik $-\ln 0,6 \approx 0,51069$ – ami valójában már nem csak kettő, de három tizedesjegyre is pontos).

6.) (5 pont) Legyenek $p(x) := 1 - 3x^2$, $q(x) := 1 + 2x^3$, $r(x) := 1 - 2x + x^2 + x^3$, $s(x) := 1 + 3x$. Kifeszítik-e ezek a polinomok a legfeljebb harmadfokú polinomok $\mathcal{P}_3$ terét?

Megoldás: A teljes $\mathcal{P}_3$ tér 4 dimenziós, egy bázisa az 1 (konstans polinom), x, x^2, x^3 rendszer. Ebben a bázisban felírva az adott polinomok koordinátáit, a $\mathbf{p} = (1, 0, -3, 0), \mathbf{q} = (1, 0, 0, 2), \mathbf{r} = (1, -2, 1, 1)$ és $\mathbf{s} = (1, 3, 0, 0)$ együttható-vektorok adódnak. A $\{p, q, r, s\}$ rendszer pontosan akkor lehet generátorrendszer, ha az oszloptér 4 dimenziós, tehát ha a mátrixuk teljes rangú, nem-szinguláris, azaz ha a vektorokból képzett determináns nem nulla. A kérdés tehát az, hogy $\left|\mathbf{p} \quad \mathbf{q} \quad \mathbf{r} \quad \mathbf{s}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ teljesül-e?

A kinullázást az $S_3 + 3S_1$ sorműveletettel kezdve ebből ekvivalensen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{O_1 - 2O_2}{=} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$

Tehát a megadott polinomok generátorrendszert (és így bázist) alkotnak $\mathcal{P}_3$-ban.

7.) (9 pont) Határozza meg az $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorait! Írja fel a diagonális alakot, ha A diagonalizálható!

Megoldás: Az A mátrix karakterisztikus polinomja $p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & \lambda & 2 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$.

Ezt előbb az első oszlop, majd az utolsó sor szerint kifejtve $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)^2$ és így megkapjuk a karakterisztikus egyenletet, valamint a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$ sajátértékeket.

A 2 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat az $(A-2I)\mathbf{x}=0$ homogén lineáris egyenletrendszerből kapjuk, amelynek együttható mátrixa $\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ebből Gauss-Jordan elimináció után $\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ redukált lépcsős forma adódik, így a sajátvektorok $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakúak. Hasonlóan, a -2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $(A+2I)\mathbf{y}=0$ homogén lineáris egyenletrendszerből számolhatóak. Ennek együtthatómátrixa $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, amiből a Gauss-Jordan eliminációt az $S_2 - S_1$ és $S_3 + S_1$ sorműveletekkel kezdve és a redukált lépcsős alakig folytatva $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jön ki. Innen leolvasva tehát y_1 tetszőleges, $y_2 = y_3$ és $y_4 = 0$ adódik. A sajátvektorok ennek megfelelően $r\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ alakúak.

Az A mátrixnak van 4 lineárisan független sajátvektora, így diagonalizálható. A talált sajátvektorokat egymás mellé írva – és ügyesen választva a sorrendet – a $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ bázis áttérési mátrix adódik. Ennek B^{-1} inverzét is Gauss-Jordan eliminációval számítjuk ki:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_3 - S_2}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{S_1 - S_4, S_2 - S_4}{\overset{S_3 + S_4}{\Leftrightarrow}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{S_1-(1/2)S_3 \\ S_2-(1/2)S_3}}{\overset{(-1/2)S_3}{\Leftrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ahonnan $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tehát A diagonalizáltja:

$$A = BDB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.) (3 pont) Tekintsük az $F(x,y,z) = (\cos(x+z), xy+zx, y^2+e^x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt! Ekkor az $\mathbf{a} := (0,2,0)$ pont képe a $\mathbf{b} := F(\mathbf{a}) = (1,0,5)$ pont lesz. Invertálható-e differenciálható módon az F függvény a $\mathbf{b}$ pont egy környezetében? Ha nem, indokolja, miért nem, és ha igen, akkor határozza meg a $G := F^{-1}$ függvény $\mathbf{b}$ körüli legjobb lineáris közelítését!

Megoldás: Jelöljék a képtérben a koordinátákat (u,v,w), azaz legyen $u(x,y,z) := \cos(x+z), v(x,y,z) := xy+zx, w(x,y,z) := y^2+e^x$ és $F(x,y,z) = (u,v,w)$: ekkor a $G(u,v,w) = (x,y,z)$ inverz függvényt keressük a $\mathbf{b} := (1,0,5)$ pont környezetében.

Az $F \in C^1$ függvény mindenképpen invertálható, ha a legjobb lineáris közelítése invertálható, azaz ha a derivált-mátrixa nem-szinguláris: viszont ha a derivált-mátrix szinguláris, akkor a függvény vagy nem invertálható, vagy az inverze nem lesz differenciálható (és így nem lesz legjobb lineáris közelítése sem). A derivált-mátrix most

$$DF(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{a}) & \frac{\partial u}{\partial z}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{a}) & \frac{\partial v}{\partial z}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial w}{\partial y}(\mathbf{a}) & \frac{\partial w}{\partial z}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(x+z) & 0 & -\sin(x+z) \\ y+z & x & x \\ e^x & 2y & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ez a mátrix szinguláris, nem invertálható, így F-nek vagy nincsen is inverze, vagy ha van is, akkor az nem differenciálható, azaz nem lesz neki legjobb lineáris közelítése.

9.) (6 pont) Határozzuk meg a $\nu(x,y,z) := x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{8}{y} + z - 4\sqrt{z}$ függvény szélsőértékhelyeit és azok jellegét!

Megoldás: Az értelmezési tartomány a nevezők és a gyök miatt $\mathcal{D}_\nu = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times [0,\infty)$ azaz a (z-ben) nemnegatív féltér, kivéve az $x = 0$ és $y = 0$ (z tengelyen áthaladó) síkokat. Ezen a (négy térnyolcadból álló) értelmezési tartományon $\nu \in C^\infty(\mathcal{D}_\nu)$, tehát differenciálható is, ezért szélsőértékhelyek vagy a tartomány határán vagy belső, tehát kritikus pontokban léphet fel. A tartomány határán fekvő síkok közül egyedül a $z = 0$ sík, azaz az xy tengelyek S "alapsíkja" tartozik $\mathcal{D}_\nu$-höz, így szélsőértékhely vagy ezen, vagy kritikus pontban fordulhat elő.

A határra vonatkozóan a $\varphi := \nu|_S$ megszorítás függvény egy kétváltozós függvény lesz: $\varphi(x,y) = x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{8}{y}$. Az S síkra nézve ν-nek feltételes szélsőértékhelyét kapjuk, ha az x, y változókban φ-nek szélsőértéke van. $\mathcal{D}_\varphi$ most négy nyílt síknegyed, tehát a határa nem tartozik hozzá, és csak belső pontban - azaz kritikus pontban - lehet szélsőértéke. Ezért szükséges feltétel, hogy $\nabla\varphi = \mathbf{0}$ legyen, tehát $(1 - \frac{y}{x^2}, \frac{1}{x} - \frac{8}{y^2}) = (0,0)$, amiből $x^2 = y$, $y^2 = 8x \Rightarrow y^4 = 64x^2$, amiből $y^4 = 64x^2 = 64y \Rightarrow y^3 = 64$ és $y = 4$ (merthogy $y \neq 0$), tehát végül $x = y^2/8 = 2$ is adódik. Tehát φ egyetlen kritikus pontja S-en a $\mathbf{p} = (2,4)$ pont. Itt a második derivált mátrix vagy Hesse mátrix

$$H = D^{(2)}\varphi(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(\mathbf{p}) & \frac{\partial^2\varphi}{\partial xy}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial xy}(\mathbf{p}) & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2y}{x^3} & -\frac{1}{x^2} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{16}{y^3} & \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Ez a Hesse-mátrix pozitív definit: ez könnyen látszik pl. a főminorok pozitivitása alapján, de akát a sajátértékek meghatározásával is: ehhez a karakterisztikus egyenlet $P_H(\lambda) = |\lambda I - H| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1/4 \\ 1/4 & \lambda - 1/4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5/4\lambda + 3/16$, amiből $\lambda_{1,2} = 5/8 \pm \sqrt{25/64 - 3/16} = 5/8 \pm \sqrt{13}/8$, tehát mindenesetre $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Ezért $H \gg 0$ és $\mathbf{p}$-ben minimuma van φ-nek, azaz S-re vonatkozóan feltételes minimuma van ν-nek.

Azt, hogy ez egyúttal lokális minimuma-e ν-nek az S-re való megszorítás nélkül is, az attól függ, hogyan viselkedik a $\nu(x,y,z)$ függény a $(2,4,0)$ pont közelében. Legyen pl. most $\psi(z) := \nu(2,4,z)$, akkor $\psi(z) = 8 + z - 4\sqrt{z}$, ami egy $[0,\infty)$-n folytonos, $(0,\infty)$-ben differenciálható függvény, és a deriváltja $\psi'(z) = 1 - 2/\sqrt{z} < 0$, ha $0 < z < 4$, így ψ (szigorúan) monoton csökkenő $[0,4]$-ben. ezért tehát ν-nek nincsen minimumhelye a $\mathbf{p}^\star := (2,4,4)$ pontban, és ezek szerint ν-nek nincsen $\mathcal{D}_\nu$ határán szélsőértékhelye.

A kritikus pontokat a $\nabla\nu = \mathbf{0}$ egyenlet definiálja. Ezt kiszámítva tehát $(0,0,0) = \nabla\nu = (1 - \dfrac{y}{x^2}, \dfrac{1}{x} - \dfrac{8}{y^2}, 1 - \dfrac{2}{\sqrt{z}})$ így $\sqrt{z} = 2$, $z = 4$, és a fenti számolással azonos módon $x = 2$, $y = 4$. Tehát ν egyetlen kritikus pontja $\mathbf{q} := (2,4,4)$.

Hogy van-e a $\mathbf{q} := (2,4,4)$ pontban szélsőértékhely, és ha igen, akkor milyen, annak eldöntéséhez ismét a második derivált kiszámításához folyamodunk:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\nu}{\partial x^2}(\mathbf{q}) & \frac{\partial^2\nu}{\partial xy}(\mathbf{q}) & \frac{\partial^2\nu}{\partial xz}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial^2\nu}{\partial xy}(\mathbf{q}) & \frac{\partial^2\nu}{\partial y^2}(\mathbf{q}) & \frac{\partial^2\nu}{\partial yz}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial^2\nu}{\partial xz}(\mathbf{q}) & \frac{\partial^2\nu}{\partial yz}(\mathbf{q}) & \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2y}{x^3} & -\frac{1}{x^2} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{16}{y^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z^{3/2}} \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus polinomot (az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel kezdve) konkrétan meg is határozhatjuk a gyökeivel együtt: $P_H(\lambda) = |\lambda I - H| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & \lambda - 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1/8 \end{vmatrix} =$ $(\lambda - 1/8)(\lambda - 1/8)\left(\lambda^2 - 5/4\lambda + 3/16\right)$, amiből $\lambda_3 = 1/8$ és $\lambda_{1,2} = 5/8 \pm \sqrt{13}/8 > 0$ mint fent, tehát az összes sajátérték pozitív, $H \gg 0$ és $\mathbf{q}$-ban minimum van.

Be lehet látni $H \gg 0$ fennállását a főminorok vizsgálatával is: $M_{11} = h_{11} = 1 > 0$, $M_2 = 3/16 > 0$ és $M_3 = \det H = 3/(128) > 0$, tehát $M_k > 0$ $(k = 1,2,3)$, így $H \gg 0$.

10.) (3 pont) Teljes differenciál-e a $(\cos xe^{y+z} + z)\,dx + \sin xe^{y+z}\,dy + (\sin xe^{y+z} + x)\,dz$ kifejezés?

Megoldás: Igen. Ehhez a Young tétel következményeit kell ellenőrizni, mivel a folytonosan deriválható $U(x,y,z) := \cos xe^{y+z} + z$, $V(x,y,z) = \sin xe^{y+z}$ és $W(x,y,z) = \sin xe^{y+z} + x$ függvények pontosan akkor lesznek egy $p(x,y,z)$ potenciálfüggvény parciális deriváltjai, ha teljesül az, ami p-re a Young tételből következik a keresztben vett parciális deriváltak egyenlőségére.

Tehát $U'_y = \cos xe^{y+z}$ és $V'_x = \cos xe^{y+z}$, megegyeznek; $U'_z = \cos xe^{y+z} + 1$ és $W'_x = \cos xe^{y+z} + 1$, megegyeznek, és végül $V'_z = \sin xe^{y+z}$ és $W'_y = \sin xe^{y+z}$, egyenlőek.

Nem volt kérdés, de a potenciálfüggvényt is kiszámolható: $p(x,y,z) = \sin x\ e^{y+z} + xz + C$.

Abban az esetben, ha valaki a feladatot úgy értelmezte (félre), hogy $U(x,y,z) = \cos(xe^{y+z}) + z$ vagy esetleg $U(x,y,z) = \cos(xe^{y+z} + z)$, akkor helyes deriválások esetén a Young tétel feltételei sérülnek és nem létezik potenciálfüggvény. (Erre a tévedésből megoldott könnyebb feladatra 2 pontot megadtunk.)

11.) (3 pont) Számítsa ki az $I := \iiint_K \cos(x+2y+3z)(e^{x^2} + \operatorname{sh}\sqrt{z})\ dxdydz$ hármasintegrált, ahol a K halmaz a $[0,\pi]^3$ kocka!

Megoldás: Fubini tételével szukcesszív egyszeres integrálokra térünk át, úgy, hogy legbelül az y változó szerinti integrálás legyen. Így $I = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+2y+3z)(e^{x^2} + \operatorname{sh}\sqrt{z})\ dy\ dx\ dz = \int_0^\pi \int_0^\pi (e^{x^2} + \operatorname{sh}\sqrt{z}) \left(\int_0^\pi \cos(x+2y+3z)\ dy\right)\ dx\ dz = 0$, tekintve, hogy $\int_0^\pi \cos(a+2y)\ dy = \int_0^{2\pi} \cos(a+t)\ \frac{1}{2}\ dt = 0$ tetszőleges rögzített a mellett.

12.) (7 pont) Egy $R = 26$ cm sugarú – közel gömb alakú – görödgdinnyébe egyenes kúp alakú L léket vágunk úgy, hogy annak csúcsa a D dinnye közepébe érjen. Hányadrészét teszi ki a lék térfogata az egész dinnyéének, ha a kúpnak a gömb héjánál $\ell = 10$ cm a sugara? (Útmutatás: Használjuk az $(x,y,z) = G(r,\varphi,\theta) := (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ gömbi koordinátákra való áttérést!)

Megoldás: A teljes dinnye térfogata $V(D) = \frac{4\pi}{3}R^3$, ami közismert, de ugyanúgy ki is lehet számolni, mint most alább a lék térfogatát fogjuk. Az L lékre $V(L) = \iiint_L 1dxdydz = \iiint_E J_G(r,\varphi,\theta)drd\varphi d\theta$, ahol J a $G(r,\varphi,\theta) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ gömbi koordinátákra való áttérés leképezés Jacobi-determinánsa (deriváltmátrixa determinánsának abszolút értéke) és E az L kúpmetszetnek megfelelő koordináta-hármasok a gömbi koordinátákban felírva: azaz $E = \{(r,\varphi,\theta)\ :\ 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \alpha\} = [0,R] \times [0,2\pi] \times [0,\alpha]$, ahol a feltételek szerint $\alpha := \arcsin(\ell/R)$. A gömbi koordináta-áttérés Jacobi-determinánsa $J_G(r,\varphi,\theta) = \sin\theta r^2$. Tehát ebből a Fubini tétel alkalmazásával szukcesszív integrálokra áttérve $V(L) = \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^R \sin\theta r^2 dr\ d\varphi\ d\theta = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R 2\pi \int_0^\alpha \sin\theta\ d\theta = \dfrac{2\pi R^3[1-\cos\alpha]}{3}$.

Ha D teljes térfogatát számoljuk, akkor itt $\alpha = \pi$-ig kell elmenni: ezért a két térfogat aránya láthatóan $\lambda = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{2}$. Végül behelyettesítve és az ismert azonosságokkal $\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)} = \sqrt{1-(\ell/R)^2} = \sqrt{1-25/169} = \sqrt{144/169} = 12/13$, azaz $\lambda = 1/26$.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H — Vizsga feladatsor — J

Dátum: 2016. június 3. Munkaidő: 90 perc

Hallgató neve: Hallgató Neptun kódja: .

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) "Ha egy $\sum_k a_k$ sor tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ érték esetén átrendezhető s-hez konvergens módon, akkor a végtelen sor abszolút konvergens."

b.) "Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$, akkor A diagonalizálható."

c.) "Egy, a $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \le 1\}$ zárt egységkörlapon értelmezett folytonos f függvénynek legalább két különböző K-beli pontban van támaszsíkja."

1.) (4 pont) Fogalmazza meg és igazolja az ú.n. ortogonalitási relációkat!

2.) (3 pont) Mikor nevezünk egy kvadratikus alakot pozitív definitnek? Hogyan jellemezhetjük ezt a tulajdonságot a mátrix sajátértékeivel? És a mátrix aldeterminánsaival?

3.) (5 pont) Mik a V_n Jordan-térfogat alaptulajdonságai? Milyen egyértelműségi tétel érvényes ezekkel az alaptulajdonságokkal?

- -

4.) (5 pont) **a.)** Igazolja, hogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{\sqrt{n}}$ végtelen sor konvergens!

b.) Keressen az $\varepsilon := 0,01$ értékhez alkalmas $N := N(\varepsilon)$ küszöb-indexet, amelyre teljesül, hogy $n \ge N$ esetén az n-edik részletösszegek a sor összegét ε hibán belül megközelítik!
(Segítségül: Nem nélkülözhetetlen, de felhasználható, hogy $e \approx 2,7183$ és $\ln 10 \approx 2,3026$.)

5.) (5 pont) Számítsa ki a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3 \cos x}$ határértéket!

6.) (3 pont) Állapítsa meg, hogy a $\begin{bmatrix}0\\2\\4\\1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}6\\0\\0\\3\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\-2\\4\\-1\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}5\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\1\\3\end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek-e $\mathbb{R}^5$-ben!

7.) (10 pont) Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Határozza meg A sajátértékeit, a sajátértékekhez tartozó sajátvektorait, és írja fel a szokásos diagonalizált alakját!

(Útmutatás: Vegyük észre, hogy az $\mathcal{R}(A)$ képtér 1 dimenziós, és keressünk sajátvektort ennek alapján! Használjuk fel, hogy A szinguláris, így van triviális sajátértéke is.)

8.) (4 pont) A $z = f(x, y)$ függvény a $z^3 - xy + yz + y^3 = 2$ függvényegyenletnek tesz eleget. Határozza meg f gradiensét a $\mathbf{p} := (1, 1)$ pontban!

9.) (4 pont) Határozza meg a $\mu(x, y) := xy + \dfrac{27}{x} + \dfrac{27}{y}$ kétváltozós valós függvény szélsőértékhelyeit és a szélsőértékek jellegét!

10.) (3 pont) Teljes differenciál-e az $(y + \operatorname{sh} x)\ dx + (z + \sin(xy))\ dy + (y + \operatorname{ch} z)\ dz$ kifejezés? Ha igen, keressük meg a potenciálfüggvényét, ha nem, bizonyítsuk be, hogy az nem létezik!

11.) (4 pont) Számítsa ki az $X := \int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} dx\ dy$ integrál-kifejezést!

12.) (7 pont) Egy $R = 7$ cm sugarú tömör fémgömb egyik fele vasból, másik fele alumíniumból készült. Hol lesz a gömb súlypontja? (Vegyük úgy, hogy a vas fajsúlya $\approx 7,8$, az alumíniumé $\approx 2,7$ kg/dm^3.)

- -

EMLÉKEZTETŐ: A GÖMBI KOORDINÁTÁK

A térben egy P pont gömbi koordinátái az $r := |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a P pontnak az xy-síkra vetített merőleges P' vetületének a polárkoordinátákból jól ismert φ irányszöge (azaz az $\overrightarrow{OP'}$ szöge a pozitív x tengely irányával), és a P pont θ "elhajlása", azaz $\overrightarrow{OP}$-nek a pozitív z tengellyel bezárt szöge.

Mivel $|\overrightarrow{OP'}| = \sin\theta |\overrightarrow{OP}|$, a gömbi koordinátákkal kifejezve a a P ponthoz tartozó szokásos derékszögű (x, y, z) koordinátákat, azt kapjuk, hogy $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. Tehát a gömbi koordinátákra való áttérést a $G(r, \varphi, \theta) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r\cos\theta)$ leképezés valósítja meg.

Az áttérés Jacobi determinánsára

$$J_G(r, \varphi, \theta) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial z}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{matrix} \right\|$$

aminek utolsó két oszlopából r-et kiemelve és a determinánst az utolsó sor szerint kifejtve

$$J_G(r, \varphi, \theta) = r^2 \left| \cos\theta \begin{vmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} + (-\sin\theta) \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \right| = r^2\sin\theta.$$

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H – Vizsga feladatok megoldásai – J

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) "Ha egy $\sum_k a_k$ sor tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ érték esetén átrendezhető s-hez konvergens módon, akkor a végtelen sor abszolút konvergens."

HAMIS. (Ha csak két különböző értékhez át lehet rendezni a sort, akkor Riemann tétele értelmében már nem lehet abszolút konvergens .)

b.) "Ha $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ sajátértékei az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak, akkor A diagonalizálható."

IGAZ. (U.i. a feltétel szerint van n különböző sajátérték, márpedig minden sajátértékhez kell lennie legalább egy sajátvektornak – t.i. az $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek van nem-triviális megoldása, mert szinguláris az együttható-mátrixa – ezért tehát vannak kellő számban (n-en) különböző sajétértékekhez tartozó, és így lineárisan független sajátvektorok, amelyekkel lehet diagonalizálni. Különben sajátérték bázisban minden transzformáció diagonális.)

c.) "Egy, a $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \le 1\}$ zárt egységkörlapon értelmezett folytonos f függvénynek legalább két különböző K-beli pontban van támaszsíkja."

IGAZ. (U.i. a korlátos és zárt K halmazon folytonos f függvénynek van m minimuma és M maximuma – valamilyen $P \in K$ pontban felveszi az infinumát, m-et, és valamilyen $Q \in K$ pontban felveszi a maximumát, M-et – és így P-ben is és Q-ban is vízszintes támaszsíkja van. Ha véletlenül $P = Q$ nem különbözik, akkor pedig $m = M$, tehát $f \equiv m$ konstans, és így K minden pontjában vízszintes támaszsíkja van.)

1.) (4 pont) Fogalmazza meg és igazolja az ú.n. ortogonalitási relációkat!

Komplex alakjukban ez az e^{inx} $(n \in \mathbb{N})$ alakú függvények ortogonalitásáról szól: azt mondja ki, hogy ha $m \ne n$, akkor $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt = 0$. A bizonyítás: $k := n - m \ne 0$ esetén $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi} = 0$. (Ezek a formulák az ú.n. <u>komplex ortogonalitási relációk</u> e^{int}-re.)

Az Euler formulákon keresztül ezek ekvivalensek a Fourier-sorok valós alakjában szereplő alapfüggvények megfelelő ortogonalitási relációival. Az ortogonalitási relációk valós alakban azt jelentik, hogy $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \ dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \ dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \ dx = 0 \quad (n \ne m)$ és $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx \sin nx \ dx = 0$ – azaz a trigonometrikus sor valós alakban is ortogonális. A komplex alak helyett ezt is ki lehet integrálni, bár kevésbé gazdaságos (mert három integrálást és trigonometrikus azonosságokat kell alkalmazni) - gyorsabb a komplex alak.

2.) (3 pont) Mikor nevezünk egy kvadratikus alakot pozitív definitnek? Hogyan jellemezhetjük ezt a tulajdonságot a mátrix sajátértékeivel? És a mátrix aldeterminánsaival?

Az A szimmetrikus mátrixszal értelmezett $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ kvadratikus alak *pozitív definit*, jelben $A \gg 0$, ha $\forall\ \mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$. Ez a tulajdonság ekvivalens azzal, hogy A összes sajátértéke pozitív. Ugyancsak ekvivalens kritérium, hogy A összes főminora – azaz a bal felső $k \times k$-as almátrixainak M_k determinánsa – az $M_k > 0$ pozitivitási feltételnek tesz eleget minden $k = 1, \ldots, n$-re.

3.) (5 pont) Mik a V_n Jordan-térfogat alaptulajdonságai? Milyen egyértelműségi tétel érvényes ezekkel az alaptulajdonságokkal?

0. $V_n(|0,1|^n) = 1$ (normáltság);

1. Ha $A = B + \mathbf{v}$ (vagy, ha $A \equiv B$) akkor $V_n(A) = V_n(B)$ (invariancia);

2. Ha $A \supset B$ akkor $V_n(A) \geq V_n(B)$ (monotonitás); $\Leftrightarrow \forall$ H-ra $V_n(H) \geq 0$ (pozitivitás);

3. $V_n(A \cup B) = V_n(A) + V_n(B)$ ha A, B Jordan-mérhetőek és $A \cap B = \emptyset$ (additivitás).

Ilyen feltételeket kielégítő halmazfüggvény csak egyetlen egy létezik.

- -

4.) a.) (5 pont) Igazolja, hogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{\sqrt{n}}$ végtelen sor konvergens!

b.) Keressen az $\varepsilon := 0,01$ értékhez alkalmas $N := N(\varepsilon)$ küszöb-indexet, amelyre teljesül, hogy $n \geq N$ esetén az n-edik részletösszegek a sor összegét ε hibán belül megközelítik! (Segítségül: Nem nélkülözhetetlen, de felhasználható, hogy $e \approx 2,7183$ és $\ln 10 \approx 2,3026$.)

Megoldás: A konvergencia nyilvánvaló abból, hogy a tagok előjelei váltakoznak, és abszolút értékei (egy indextől kezdve) csökkenőek: azaz a sor alternáló (Leibniz típusú) sor.

A monoton csökkenés azért igaz, mert az $f(t) := \log t / \sqrt{t}$ függvény deriváltja $f'(t) = t^{-3/2} - \frac{1}{2}\frac{\log t}{t^{3/2}}$, ami negatív, mihelyst $\log t > 2$ azaz $t > e^2$ lesz.

E sorokra érvényes az $R_N := |S - S_N| \leq a_{N+1}$ hibabecslés, így olyan N elegendő, amelyre $\log(N+1)/\sqrt{N+1} < \varepsilon$. Az előbb igazoltuk, hogy ez a kifejezés monoton csökken, így az $\varepsilon = 0,01$-hez próbálgatással kereshetünk alkalmas N-et: pl. ha $N = 10.000$, akkor $\sqrt{N} = 100$ és $\log N > 1$ miatt még nem lesz jó a hányados; ha felmegyünk mondjuk $N = 1.000.000$-ig, akkor $\log 1.000.000 = 6 \log 10 > 12$ miatt még mindig $\log N/\sqrt{N} > 12/1000 > 0,01$, de ha egészen $N = 100.000.000$-ig elmegyünk, akkor $\log N/\sqrt{N} < 7 \ln 10 / 10.000$, és $\ln 10 < 3$ (mert $e > 2,7$-re $e^3 > 2 \cdot 2 \cdot 2,5 = 10$) így $\log 100.000.000/\sqrt{100.000.000} < 7 \cdot 3/10.000 < 0,01$.

5.) (5 pont) Számítsa ki a $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3 \cos x}$ határértéket!

Megoldás: Először is, vegyük észre, hogy $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, így a szorzat határértékére vonatkozó szabály értelmében ha létezik a határérték, akkor az ugyanaz, mint a $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3}$ limesz. (Egyébként innentől kezdve az előadáson elhangzott és az előadó honlapján megtalálható jegyzet 2.13. Példájaként rögzített feladat majdnem szó szerint ugyanez – csak ott tg van arctan helyett.)

Alkalmazva, hogy $\arctan x = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$, kapjuk, hogy $|x| < 1$-re $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$; hasonlóan, tudjuk, hogy $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ – itt a hibabecsléseknél elegendő, hogy a harmadfokig kiírt hatványsorok az adott függvény 0 körüli legjobb harmadfokú közelítései, azaz a hiba $o(x^3)$, még x^3-bel elosztva is 0-hoz tart.

Ezt beírva tehát $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3))-(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{x^3}=-\dfrac{1}{6}.$

6.) (3 pont) Állapítsa meg, hogy a $\begin{bmatrix}0\\2\\4\\1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}6\\0\\0\\3\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\-2\\4\\-1\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}5\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\1\\3\end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek-e $\mathbb{R}^5$-ben!

<u>Megoldás:</u> A vektorok lineárisan függetlenek pontosan akkor, ha a belőlük képzett mátrix maximális rangú, azaz nemszinguláris, tehát ha a determinánsa nem 0. Így a determinánst pontosan nem is kell kiszámoljuk, csak azt kell nyomon kövessük, hogy olyan átalakításokat – sor- és oszlopműveleteket – végezzünk, amelyekkel a determináns nem-nulla volta megmarad.

$$\begin{vmatrix}0&6&3&5&2\\2&0&-2&-2&1\\4&0&4&0&-1\\1&3&-1&1&1\\2&0&-1&0&3\end{vmatrix}\overset{S_1-2S_4}{=}\begin{vmatrix}-2&0&5&3&0\\2&0&-2&-2&1\\4&0&4&0&-1\\1&3&-1&1&1\\2&0&-1&0&3\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}-2&5&3&0\\2&-2&-2&1\\4&4&0&-1\\2&-1&0&3\end{vmatrix}\overset{S_1+(3/2)S_2}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&0&3/2\\2&-2&-2&1\\4&4&0&-1\\2&-1&0&3\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}1&2&3/2\\4&4&-1\\2&-1&3\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}1&2&3\\4&4&-2\\2&-1&6\end{vmatrix}\overset{O_1+2O_3,\,O_2+2O_3}{=}\begin{vmatrix}7&8&3\\0&0&-2\\14&11&6\end{vmatrix}$$

$$\sim\begin{vmatrix}7&8\\14&11\end{vmatrix}=7\cdot\begin{vmatrix}1&8\\2&11\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}1&8\\2&11\end{vmatrix}=11-16\neq 0\qquad\Rightarrow \text{a vektorok lineárisan függetlenek.}$$

7.) (10 pont) Legyen $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{bmatrix}$. Határozza meg A sajátértékeit, a sajátértékekhez tartozó sajátvektorait, és írja fel a szokásos diagonalizált alakját! (<u>Útmutatás:</u> Vegyük észre, hogy az $\mathcal{R}(A)$ képtér 1 dimenziós, és keressünk sajátvektort ennek felhasználásával! Azt is vegyük tekintetbe, hogy A nyilvánvalóan szinguláris, így van triviális sajátértéke is.)

<u>Megoldás:</u> Az A mátrix rangja egy, így az általa meghatározott lineáris leképezés képtere 1 dimenziós: például a $\mathbf{v}:=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ vektor kifeszíti, ezért a $\mathbf{v}$ vektor sajátvektor is egyben.

Mivel $A\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\10\\10\\10\end{bmatrix}=10\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=10\mathbf{v}$ teljesül, ezért a $\mathbf{v}$ vektorhoz a 10 sajátérték tartozik.

A dimenzió tételből adódik, hogy a magtér (ami a 0 sajáértékhez tartozó sajátaltér is egyben) 3 dimenziós, így a 0 sajátérték háromszoros multiplicitással. Ebből már az is következik, hogy rendelkezésre áll négy független sajátvektor, tehát A diagonalizálható, és a diagonalizált alakjában a D diagonális mátrix átlójában rendre 10, valamint $0, 0$ és 0 állnak.

A $\lambda_{2,3,4} = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $A\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai, ami az $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$ egyenletet jelenti (az r.e.e.f. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ lesz). Ebből a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

A diagonalizálásához tehát a fenti lineárisan független sajátvektorokból álló bázisra térünk át, melynek áttérési mátrixa $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, és $A = BDB^{-1}$.

A B^{-1} inverz mátrix kiszámításához Gauss-Jordan eliminációt használunk: az eredmény gyorsabb elérése (a sok 0 együttható kihasználása) érdekében azonban először is elvégezzük az $S_1 + 2S_2$, $S_1 + 3S_3$ és $S_1 + 4S_4$ sorműveleteket. Így kapjuk, hogy a kibővített együtthatómátrix

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{10}S_1}{\underset{S_2-S_1, S_3-S_1, S_4-S_1}{\Leftrightarrow}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -0,1 & 0,8 & -0,3 & -0,4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -0,1 & -0,2 & 0,7 & -0,4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0,1 & -0,2 & -0,3 & 0,6 \end{array}\right] \underset{\Leftrightarrow}{\begin{matrix} (-1)S_2 \\ (-1)S_3 \\ (-1)S_4 \end{matrix}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,1 & -0,8 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & -0,6 \end{array}\right]$$

tehát

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & -0,8 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & -0,6 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Végül A diagonalizálása így néz ki:

$$A = BDB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

8.) (4 pont) A $z = f(x, y)$ függvény a $z^3 - xy + yz + y^3 = 2$ függvényegyenletnek tesz eleget. Határozza meg f gradiensét a $\mathbf{p} := (1, 1)$ pontban!

Megoldás: Először is meghatározzuk, mi a $z_0 = f(\mathbf{p}) = f(1, 1)$ érték. Ez a behelyettesítés szerint a $z^3 + z = 2$, $z^3 + z - 2 = 0$ harmadfokú egyenletnek tesz eleget. Ránézésre is látszik, hogy $z_0 = 1$ ennek gyöke, így a $z - z_0 = z - 1$ faktorral elosztjuk a harmadfokú polinomot és kapjuk, hogy $z^3 + z - 2 = (z - 1)(z^2 + z + 2)$. Az utóbbi másodfokú faktornak nincsen valós gyöke, így az egyenletnek egyetlen valós megoldása van, a $z = z_0 = 1$. Tehát $f(\mathbf{p}) = 1$, és a $\mathbf{q} := (1, 1, f(\mathbf{p})) = (1, 1, 1)$ ponton halad át az implicit módon megadott $z = f(x, y)$ függvény.

Az implicit egyenlet azt jelenti, hogy az $F(x, y, z) := z^3 - xy + yz + y^3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvénybe behelyettesítve a $z = f(x, y)$ függvényt, azonosan konstans függvényt kapunk. (Pontosabban: ha $G(x, y) := (x, y, f(x, y))$, akkor a $H := F \circ G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kompozíciófüggvény konstans 2.)

Így az *implicit alakban megadott függvények deriválásáról szóló tétel értelmében* $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, tehát ki kell számoljuk F mindegyik parciális deriváltját.

Ezt elvégezve, $\nabla F = \big(-y, -x+z+3y^2, 3z^2+y\big)$, tehát $\nabla f = \left(\dfrac{y}{3z^2+y}, \dfrac{x-z-3y^2}{3z^2+y}\right)$, úgyhogy a $\mathbf{p} = (1,1)$, $z_0 = 1$ értékeket beírva $\nabla f(\mathbf{p}) = (1/4, -3/4)$.

9.) (4 pont) Határozza meg a $\mu(x,y) := xy + \dfrac{27}{x} + \dfrac{27}{y}$ kétváltozós valós függvény szélsőértékhelyeit és a szélsőértékek jellegét!

Megoldás: Az értelmezési tartomány a nevezők miatt $\mathcal{D}_\mu = \mathbb{R}^2 \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\})$, azaz a sík, kivéve az x és y tengelyek egyeneseit. Ezen az értelmezési tartományon $\mu \in C^\infty(\mathcal{D}_\mu)$, tehát differenciálható is, ezért szélsőértékhelyek vagy a tartomány határán vagy kritikus pontokban fordulhatnak elő. A tartomány nyílt halmaz, a határa (az x és y tengelyek) nem tartozik hozzá, így csak belső, tehát kritikus pontokban fellépő szélsőértékhelyek lehetnek.

A kritikus pontokat a $\nabla\mu = \mathbf{0}$ egyenlet definiálja: ezt kiszámítva $\nabla\mu = (y - \frac{27}{x^2}, x - \frac{27}{y^2}) = (0,0)$ tehát $x^2y = 27 = xy^2$ és ebből $x = y$ és $x^3 = y^3 = 27$, tehát $x = 3$, $y = 3$.

Hogy van-e az $\mathbf{a} := (3,3)$ pontban szélsőértékhely, és ha igen, akkor milyen, annak eldöntéséhez a második derivált kiszámításához folyamodunk:

$$H := D^{(2)}\mu = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2\mu}{\partial xy}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2\mu}{\partial xy}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{54}{x^3}(\mathbf{a}) & 1 \\ 1 & \frac{54}{y^3}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Könnyen adódik, hogy a mátrix sajátértékei – a $\det(H - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 1 = (3-\lambda)(1-\lambda)$ karakterisztikus polinom gyökei – $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 1$, mind pozitívak, így $H \gg 0$ (pozitív definit) és ezért az $\mathbf{a} = (3,3)$ pontban lokális minimum van.

Be lehet látni $H \gg 0$ fennállását a főminorok vizsgálatával is: $M_{11} = h_{11} = 2 > 0$ és $M_2 = \det H = 3 > 0$, tehát $M_k > 0$ $(k = 1,2)$, így $H \gg 0$ és minimum van $\mathbf{a}$-ban.

10.) (3 pont) Teljes differenciál-e az $(y + \operatorname{sh} x)\,dx + (z + \sin(xy))\,dy + (y + \operatorname{ch} z)\,dz$ kifejezés? Ha igen, keressük meg a potenciálfüggvényét, ha nem, bizonyítsuk be, hogy az nem létezik!

Megoldás: Nem létezik potenciálfüggvénye, mert a feltételezett $F(x,y,z)$ potenciálfüggvényre nem teljesülne a Young tétel, holott az itt megadott gradiensvektor koordinátafügvényei mind $C^1(\mathbb{R})$ (és így $F \in C^2(\mathbb{R})$) függvények.

A Young tétel szerinti egyezések tényleg nem állnak fenn, mert pl. az x és y szerinti kétszeres parciális deriváltakra $\frac{\partial(y+\operatorname{sh} x)}{\partial y} = 1$, míg $\frac{\partial(z+\sin(xy))}{\partial x} = y\cos(xy)$, különbözőek.

11.) (4 pont) Számítsa ki az $X := \int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} dx\, dy$ integrál-kifejezést!

Megoldás: A belső, dx szerinti integrál nem áll elő explicit, zárt alakban (mert e^{x^2} primitív függvénye nem elemi függvény), így a belső integrál közvetlen kiszámítása bonyodalmas: csak hatványsorral tudnánk felírni. (Ez egyébként járható út, csak nehezebb: lásd alább.)

Inkább Fubini tételével térjünk át kétdimenziós, területi integrálra: ekkor a kiszámítandó mennyiség az $a := \sqrt{\ln 3}$ jelöléssel úgy írható, mint $X := \iint_T e^{x^2} dx\, dy$, ahol a T síkidomot a $0 \le y \le 2a$ és $y/2 \le x \le a$ azaz $y \le 2x \le 2a$ feltételek határozzák meg. T tehát az O, az $A(0,a)$ és a $B(a,2a)$ pontok által kifeszített háromszög lesz.

Most ismét Fubini tétele szerint egyszeres integrálokká alakítva az integrált, de ezúttal belül az y változó szerint integrálva, a határok $0 \le y \le 2x$ és $0 \le x \le a$ lesznek: $X = \int_0^{\sqrt{\ln 3}} \int_0^{2x} e^{x^2} dy\ dx = \int_0^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} 2x\ dx = [e^{x^2}]_0^{\sqrt{\ln 3}} = 3 - 1 = 2$.

A "direkt", hatványsoros megoldáshoz további említés nélkül felhasználjuk, hogy a szereplő sorok konvergenciasugara ∞, így az elvégzett műveletek mindig jogosak. A belső integrálra e^z hatványsorába $z = x^2$-et helyettesítve, majd az egyenletesen abszolút konvergens sor összegzését az integrálással felcserélve, $\int_{y/2}^a e^{x^2}\ dx = \int_{y/2}^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{y/2}^a x^{2n}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[x^{2n}/(2n+1)\right]_{y/2}^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}[a^{2n+1} - (y/2)^{2n+1}]$, amit tovább integrálva az y szerinti külső integrállal $X = \int_0^{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}[a^{2n+1} - (y/2)^{2n+1}]\ dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} \int_0^{2a} [a^{2n+1} - (y/2)^{2n+1}]\ dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}[(2a)a^{2n+1} - \frac{(2a)^{2n+2}}{2n+2} \cdot 2^{-(2n+1)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}[2a^{2n+2} - \frac{a^{2n+2}}{n+1}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+2}}{(2n+1)n!} \frac{2n+2-1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2)^{n+1}}{(n+1)!} = e^{a^2} - 1 = 3 - 1 = 2$.

12.) (7 pont) Egy $R = 7$ cm sugarú tömör fémgömb egyik fele vasból, másik fele alumíniumból készült. Hol lesz a gömb súlypontja? (Vegyük úgy, hogy a vas fajsúlya $\approx 7,8$, az alumíniumé $\approx 2,7$ kg/dm^3.)

Megoldás: Ha a vas félgömb F és az alumínium félgömb A, akkor válasszuk úgy a koordinátarendszerünket, hogy a gömb középpontja az O pont legyen és éppen a vas félgömb legyen felül (a $z > 0$ féltérben). Ha csak az egyik (mondjuk a vas) félgömb súlypontját keressük, akkor a forgásszimmetria miatt az a z tengelyre esik, magassága pedig $\overline{z} = M_{xy}/M$, ahol M a teljes tömeg, M_{xy} pedig az xy síkra vonatkozó statikai nyomaték. Mármost ha az alumínium félgömb össztömege m, a vas félgömbé M, akkor a fajsúlyok és így a tömegek aránya miatt a teljes test súlypontja a z tengelyen az $s = \dfrac{M\overline{z} + m(-\overline{z})}{M+m} = \overline{z} \cdot \dfrac{7,8 - 2,7}{7,8 + 2,7} = \overline{z}\dfrac{51}{105}$ magasságban helyezkedik el (pozitív előjellelel – nyilván a vas félgömbben lesz a tömegközéppont).

Így az a feladatunk, hogy meghatározzuk az $R = 7$ cm sugarú "felső" F félgömb súlypontjának $\overline{z}$ magasságát. A félgömb össz térfogata (ami persze kiszámolható hasonlóan, mint alább a statikai nyomaték) ismnert formula miatt is $\frac{2\pi}{3}R^3$.

A statikai nyomaték értéke $M_{xy} = \iiint_F z dx dy dz = \iiint_E r\cos\theta J_G(r,\varphi,\theta) dr d\varphi d\theta$, ahol a G gömbkoordinátákra való áttérés transzformáció $G(r,\varphi,\theta) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$, ennek Jacobi-determinánsa $J_G(r,\varphi,\theta) = \sin\theta r^2$, és ahol a gömbi koordinátákban a felső félgömbnek megfelelő halmaz $E = \{(r,\varphi,\theta)\ :\ 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi/2\} = [0,R] \times [0,2\pi] \times [0,\pi/2]$. Ebből a Fubini tétel alkalmazásával szukcesszív integrálásra áttérve $M_{xy} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \cos\theta r \sin\theta r^2 dr\ d\varphi\ d\theta = 2\pi \left[\dfrac{r^4}{4}\right]_0^R \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta = \pi\dfrac{R^4}{4}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \pi\dfrac{R^4}{4}$. Ezért a keresett súlypont magasság $\overline{z} = \dfrac{3}{8}R = \dfrac{21}{8}$, és $s = \dfrac{51}{105} \cdot \dfrac{21}{8} = \dfrac{51}{40} = 1,275$ cm.

Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha külön a félgömbök súlypontjának kiszámolása helyett mindjárt a $\rho(x,y,z) = \begin{cases} 7,8 & \text{ha } z > 0 \\ 2,7 & \text{ha } z < 0 \end{cases}$ egyesített, változó fajsúlyfüggvénnyel (fajlagos tömeggel) számolunk. Ekkor mind az M-re, mind az M_{xy}-ra felírt integrál tartalmazza a ρ, illetve polárkoordinátás áttérés után a $\gamma(r,\varphi,\theta) := \rho(G(r,\varphi,\theta)) = \begin{cases} 7,8 & \text{ha } 0 < \theta < \pi/2 \\ 2,7 & \text{ha } \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$ fajlagos tömeg függvényt, de az integrálok kiszámítása ugyanúgy történik.