Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 ősz

12. feladatsor: Lineáris állandó együtthatós egyenletrendszerek (megoldás)

---

1. Mi a Jordan-felbontása az

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$$

mátrixnak?

Megoldás. $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ gyöke $\lambda = -1$ (kétszeres).

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

összes megoldása $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ többszöröse, ezek a sajátvektorok.

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

egy megoldása $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, tehát

$$A = S \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} S^{-1},$$

ahol

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Adjuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-felbontását.

Megoldás. $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0$ megoldása $\lambda = 2$ (háromszoros gyök)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

megoldásai $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(1, 0, 2) + \beta(0, 1, 1)$ alakúak, tehát csak két lineárisan független sajátvektor van. A mátrix mindent $(1, -1, 1)$ többszöröseibe visz, válasszuk ezt az egyik bázisvektornak, egy őse pl. $(0, 1, 0)$, a harmadik lehet $(0, 1, 1)$. Ebből

$$A = S \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} S^{-1},$$

ahol

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= -9y_1 - 7y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását.

Megoldás. $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ jelöléssel az egyenlet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ alakú,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} S^{-1},$$

ahol

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix},$$

tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= e^{Ax}\mathbf{y}_0 \\ &= S \exp\left\{ \begin{bmatrix} -x & x \\ 0 & -x \end{bmatrix} \right\} S^{-1}\mathbf{y}_0 \\ &= S \begin{bmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{bmatrix} S^{-1}\mathbf{y}_0 \\ &= e^{-x} \begin{bmatrix} 1+6x & 4x \\ -9x & 1-6x \end{bmatrix} \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

4. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszert $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ jelöléssel az egyenlet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ alakú, ahol

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ gyökei $-1 \pm 2i$, a sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} \mp 2i & 2 \\ -2 & \mp 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alapján $(1, \pm i)$ többszörösei, tehát

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= e^{Ax}\mathbf{y}(0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(-1+2i)x} & 0 \\ 0 & e^{(-1-2i)x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+i)e^{(-1+2i)x} + (1-i)e^{(-1-2i)x} \\ (-1+i)e^{(-1+2i)x} + (-1-i)e^{(-1+2i)x} \end{bmatrix} \\ &= e^{-x} \begin{bmatrix} \cos(2x) - \sin(2x) \\ -\cos(2x) - \sin(2x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_2 + y_3 \\ y_3' &= -2y_3 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszert $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ alakú, ahol $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ és

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

ami éppen egy 3×3 méretű Jordan-blokk, tehát e^{Ax} közvetlenül felírható:

$$e^{Ax} = e^{-2x} \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A kezdeti feltétel $\mathbf{y}(0) = (0, 0, 1)$, tehát

$$\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} e^{-2x} \\ x e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{bmatrix}.$$

További gyakorló feladatok

6. Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-féle normálalakját.

Megoldás. $\det(A - \lambda I)$ a második sor szerint kifejtve:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (1 - \lambda)\left(1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3\right) \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 \\ &= (\lambda^2 - 1)^2 \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2, \end{aligned}$$

tehát a gyökök $\lambda = \pm 1$, mindkettő kétszeres. A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

megoldása alapján $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, 0, 1, 0) + \beta(0, 1, 0, -1)$ alakúak, tehát két 1×1 méretű Jordan-blokk van. A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alapján $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, -1)$ többszörösei, tehát ehhez a sajátértékhez egy 2×2 blokk tartozik:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

egy megoldása $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, -1, -2, 0)$, tehát

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

választással

$$A = S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} S^{-1}.$$

7. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= -3y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását.

Megoldás. Az egyenletrendszer mátrixos alakja $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, ahol $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ és

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$ gyökei $\lambda = 2 \pm 3i$. A sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} \mp 3i & 3 \\ -3 & \mp 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alapján $(1, \pm i)$, emiatt

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

választással

$$A = S \begin{bmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{bmatrix} S^{-1},$$

így

$$e^{Ax} = S \begin{bmatrix} e^{(2+3i)x} & 0 \\ 0 & e^{(2-3i)x} \end{bmatrix} S^{-1} = e^{-2x} \begin{bmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -\sin 3x & \cos 3x \end{bmatrix}$$

Az általános megoldás

$$\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{y}(0) = e^{2x} \begin{bmatrix} y_1(0)\cos 3x + y_2(0)\sin 3x \\ -y_1(0)\sin 3x + y_2(0)\cos 3x \end{bmatrix}.$$

8. Oldjuk meg az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

differenciálegyenlet-rendszert $\mathbf{y}(0) = (3, 2)$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Legyen A az együtthatómátrix, a sajátértékek $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ gyökei, tehát a 2 kétszeres multiplicitással. A sajátvektorok a

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer nemtriviális megoldásai, ezek mind $(1, 1)$ többszörösei, tehát a geometriai multiplicitás 1. Legyen $(1, 1)$ az egyik bázisvektor, ennek egy őse az $A - 2I$ leképezés szerint $(0, 1)$, ezt választhatjuk másiknak. Vezessük be az

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot, ezzel

$$A = S \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} S^{-1}.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása

$$\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{y}(0) = S \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2x} - xe^{2x} \\ 2e^{2x} - xe^{2x} \end{bmatrix}.$$

9. Oldjuk meg az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 10 & -19 & 13 \\ 1 & -1 & 1 \\ -9 & 18 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

differenciálegyenlet-rendszert $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 1)$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Legyen A az együtthatómátrix, a karakterisztikus polinomja $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda + 3)$, tehát 0 kétszeres, -3 egyszeres gyök. A 0 sajátértékhez csak $(-2, 1, 3)$ többszörösei a sajátvektorok (a geometriai multiplicitás 1), tehát 2×2 méretű Jordan-blokk tartozik hozzá. Legyen az első bázisvektor $(-2, 1, 3)$, ennek egy őse (az $A - 0I = A$ leképezés szerint) a második, például $(1, 2, 2)$, a harmadik pedig a 3 sajátértékhez tartozó egyik sajátvektor, például $(1, 0, -1)$. Vezessük be az

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

mátrixot, ezzel

$$A = S \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} S^{-1}.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása

$$\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{y}(x) = S \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3x} \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 4x - 9e^{-3x} \\ 2x \\ -8 + 6x + 9e^{-3x} \end{bmatrix}$$

10. Oldjuk meg az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 6 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

differenciálegyenlet-rendszert $\mathbf{y}(0) = (1, 1, -1)$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Legyen A az együtthatómátrix, a sajátértékek $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3$ gyökei, tehát a 0 háromszoros gyök. A hozzá tartozó sajátvektorok $(1, 3, 1)$ többszörösei (a geometriai multiplicitás 1), tehát egy 3×3 Jordan-blokk van. Válasszuk az első bázisvektornak ezt a vektort, a második legyen ennek egy őse (az $A - 0I = A$ leképezés szerint), például $(2, 3, 0)$, az utolsó pedig ennek egy őse, például $(1, 1, 0)$. Vezessük be az

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixot, ezzel

$$A = S \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1}.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása

$$\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{y}(x) = S \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x - x^2 \\ 1 - 3x^2 \\ -1 + 2x - x^2 \end{bmatrix}.$$

11. $*$ Határozzuk meg az $\mathbf{y}'' + \Omega^2 \mathbf{y} = 0$ differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását, ha Ω $n \times n$ méretű szimmetrikus pozitív definit mátrix. Mutassuk meg, hogy minden megoldás korlátos.

Megoldás. Az egyenletrendszer másodrendű, ezt átírhatjuk $2n$ egyenletből álló elsőrendű egyenletrendszerré. Ennek mátrixa blokk-mátrix alakban írható fel legegyszerűbben:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek kell megkeresni a sajátértékeit és sajátvektorait. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda I & I \\ -\Omega^2 & -\lambda I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & I \\ -\lambda^2 I - \Omega^2 & -\lambda I \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} I & 0 \\ -\lambda I & -\lambda^2 I - \Omega^2 \end{vmatrix} = \det(\Omega^2 + \lambda^2 I), \end{aligned}$$

tehát a sajátértékeket úgy kaphatjuk meg, hogy Ω^2 sajátértékeinek ellentettjeiből négyzetgyököt vonunk (mindegyiknek 2 négyzetgyöke van). Ezek mind tisztán képzetesek, tehát a megoldások korlátosak lesznek.
A sajátvektorokat szintén blokk-alakban érdemes keresni,

$$\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -\Omega^2 \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

akkor teljesül, ha $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{y}$ és $\lambda\mathbf{y} = -\Omega^2\mathbf{x}$, tehát $-\lambda^2\mathbf{y} = \Omega^2\mathbf{y}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{y}$ (és $\mathbf{x}$ is) Ω^2 sajátvektora $-\lambda^2$ sajátértékkel. Ha választunk egy bázist Ω sajátvektoraiból, akkor így képezhetünk A sajátvektoraiból álló bázist is, amivel az általános megoldás a szokásos módon felírható. Legyenek Ω lineárisan független sajátvektorai $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, a hozzájuk tartozó sajátértékek $\omega_1, \dots, \omega_n$. Ekkor az általános megoldás

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} (C_i \cos(\omega_i x)\mathbf{v}_i + D_i \sin(\omega_i x)\mathbf{v}_i).$$

Egy másik lehetőség: az elsőrendű esethez hasonlóan itt is gondolhatunk az $n = 1$ speciális esetre, ekkor tudjuk, hogy cos és sin adja a megoldást. Hatványsorral ezek a függvények is értelmezhetőek mátrix argumentumra (ehhez még az sem szükséges, hogy Ω pozitív definit vagy szimmetrikus legyen!), az általános megoldás $\mathbf{y}(x) = \cos(\Omega x)\mathbf{y}_0 + \sin(\Omega x)\Omega^{-1}\mathbf{y}_0'$. Persze ennek kiszámításához szintén Ω sajátértékeit és sajátvektorait érdemes megkeresni.

12. $*$ Legyenek M, C, K $n \times n$-es mátrixok, M invertálható, és tekintsük az $M\mathbf{y}'' + C\mathbf{y}' + K\mathbf{y} = 0$ másodrendű differenciálegyenlet-rendszert.
    a) Írjuk át elsőrendű egyenletrendszerré az $\mathbf{y}, \mathbf{y}'$ komponenseit tartalmazó ($2n$ elemű) vektorértékű függvényre nézve.
    b) Mutassuk meg, hogy az így kapott elsőrendű állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszer mátrixának sajátértékei a $\det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = 0$ egyenlet gyökei. (Az ilyen típusú egyenletek neve kvadratikus sajátérték-probléma.)
    c) Tegyük fel, hogy M, C és K mindegyike pozitív definit. Mutassuk meg, hogy ekkor minden sajátérték valós része negatív. (Ebből következik, hogy minden megoldás 0-hoz tart amint $x \to \infty$.)

    Megoldás.
    a) Az elsőrendű egyenletrendszer blokk-mátrix alakban így írható fel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix}.$$

    b) A sajátértékek a $\det(A - \lambda I)$ polinom gyökei. Sor- és oszlopműveletekkel a determináns így egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda I & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C - \lambda I \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K - \lambda M^{-1}C - \lambda^2 I & -M^{-1}C - \lambda I \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & I \\ M^{-1}K + \lambda M^{-1}C + \lambda^2 I & M^{-1}C + \lambda I \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} I & 0 \\ M^{-1}C + \lambda I & M^{-1}K + \lambda M^{-1}C + \lambda^2 I \end{vmatrix} \\
&= \det(M^{-1}K + \lambda M^{-1}C + \lambda^2 I) = \frac{1}{\det M} \det(\lambda^2 M + \lambda C + K).
\end{aligned}$$

    Az első lépésben az i. oszlophoz hozzáadtuk az $i + n$. oszlop λ-szorosát ($i = 1, \dots, n$), a másodikban az utolsó n sort megszoroztuk -1-gyel, ezután az i. és $i + n$. oszlopot felcseréltük ($i = 1, \dots, n$), végül az első n sor szerint kifejtettük a determinánst, és felhasználtuk a determináns multiplikativitását.

c) Vezessük be a következő jelöléseket, ahol $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, M\mathbf{v} \rangle \\ c(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, C\mathbf{v} \rangle \\ k(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, K\mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

(A skalárszorzat komplex értelemben értendő és a második változóban lineáris, tehát $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ és $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ esetén $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{v_1} w_1 + \cdots + \overline{v_n} w_n$.) Ekkor m, c, k nemnegatív függvények, és mindegyik csak a nullvektoron veszi fel a 0 értéket.
Ha $\lambda \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $\det(K + \lambda C + \lambda^2 M) = 0$, akkor létezik olyan $\mathbf{v} \neq 0$, amire $(K + \lambda C + \lambda^2 M)\mathbf{v} = 0$, következésképp

$$0 = \langle \mathbf{v}, (K + \lambda C + \lambda^2 M)\mathbf{v} \rangle = k(\mathbf{v}) + \lambda c(\mathbf{v}) + \lambda^2 m(\mathbf{v}),$$

tehát λ egy olyan másodfokú egyenlet gyöke, aminek minden együtthatója pozitív. A megoldóképlet alapján

$$\lambda = \frac{-c(\mathbf{v}) + \sqrt{c(\mathbf{v})^2 - 4m(\mathbf{v})k(\mathbf{v})}}{2m(\mathbf{v})}$$

vagy

$$\lambda = \frac{-c(\mathbf{v}) - \sqrt{c(\mathbf{v})^2 - 4m(\mathbf{v})k(\mathbf{v})}}{2m(\mathbf{v})}.$$

Mindkét szám valós része negatív, mert ha $c(\mathbf{v})^2 < 4m(\mathbf{v})k(\mathbf{v})$, akkor $\operatorname{Re} \lambda = -\frac{c(\mathbf{v})}{2m(\mathbf{v})}$, ha viszont $c(\mathbf{v})^2 \geq 4m(\mathbf{v})k(\mathbf{v})$, akkor $\left|\sqrt{c(\mathbf{v})^2 - 4m(\mathbf{v})k(\mathbf{v})}\right| < c(\mathbf{v})$.