Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 ősz

13. feladatsor: Stabilitásvizsgálat, speciális egyenlettípusok

---

1. Instabilis vagy stabilis az

$$y_1' = y_1 + 3y_2 + 2y_3$$
$$y_2' = -y_2 - 2y_3$$
$$y_3' = 2y_1 + 3y_2 - y_3$$

differenciálegyenlet-rendszer? Igaz-e, hogy aszimptotikusan stabilis?

2. Stabilis-e az $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -1 & 4 & -5 \\ -2 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer?

3. Hol vannak és milyen típusúak stabilitás tekintetében az $y' = y - y^3$ differenciálegyenlet stacionárius pontjai?

4. A csillapított síkinga mozgásegyenlete $y'' + 2\alpha y' + \sin(y) = 0$, ahol $\alpha > 0$ jelent csillapítást, y a függőlegessel bezárt szög ($y = 2k\pi$ lefelé, $y = (2k+1)\pi$ pedig felfelé). Mik az egyensúlyi pontok és melyek stabilisak?

5. Bernoulli-féle differenciálegyenletnek nevezzük az

$$A_1(x)y' + A_0(x)y = B(x)y^\alpha$$

alakú egyenleteket, ahol $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, A_0, A_1 és B adott függvények. Az ilyen egyenleteket $u(x) = y(x)^{1-\alpha}$ helyettesítéssel visszavezethetjük elsőrendű lineáris differenciálegyenletre.
Oldjuk meg az alábbi Bernoulli-féle differenciálegyenleteket:
a) $2y' + y = (x-1)y^3$,
b) $3(1+x^2)y' + y = y^4$.

6. Euler-féle differenciálegyenletnek nevezzük az

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}\frac{1}{x}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}}y' + a_0\frac{1}{x^n} = b(x)$$

alakú lineáris differenciálegyenleteket, ahol $a_0, \ldots, a_n$ valós számok, $a_n \neq 0$ és $b(x)$ adott függvény. A homogén egyenletet $y(x) = u(\ln|x|)$ helyettesítéssel visszavezethetjük állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletre.
Oldjuk meg az alábbi Euler-féle differenciálegyenleteket:
a) $y'' + \frac{5}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$,
b) $y^{(4)} + \frac{6}{x}y''' + \frac{12}{x^2}y'' + \frac{6}{x^3}y' - \frac{36}{x^4}y = 0$,
c) $y'' - \frac{6}{x^2}y = 5x$.

7. Az $y'' = f(y, y')$ alakú egyenleteket másodrendű autonóm differenciálegyenletnek nevezzük. Az ilyen egyenletek megoldásánál érdemes $y'(x) = p(y(x))$ helyettesítést alkalmazni, ahol

tehát $y \mapsto p(y)$ az új ismeretlen függvény. Ekkor $y''(x) = p'(y(x))y'(x) = p'(y(x))p(y(x))$, így behelyettesítés után a

$$pp' = f(y, p)$$

elsőrendű differenciálegyenlethez jutunk. Ennek megoldása után az $y' = p(y)$ szétválasztható differenciálegyenletet kell megoldani.
Speciális eset: ha f csak az első változótól függ, akkor egy $-U$ primitív függvényt választva ($U'(y) = -f(y, y')$) az első differenciálegyenlet megoldása $p(y) = \sqrt{2(E - U(y))}$, ahol az E paraméter neve energia, $U(y)$ pedig a potenciális energia.
Oldjuk meg az alábbi másodrendű autonóm differenciálegyenleteket.
a) $y''(1 + y^2) = yy'^2$,
b) $y'' = \dfrac{y'^2}{y} + \dfrac{y'}{\sqrt{\ln y}}$ az $y(0) = e$, $y'(0) = 2e$ kezdeti feltétel mellett,
c) $y'' = \frac{1}{y^3}$,
d) $y'' = -y$.

További gyakorló feladatok

8. Stabilis-e az

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_3 + y_4 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 - 2y_4 \\ y_3' &= -y_2 + y_3 + 2y_4 \\ y_4' &= -2y_1 + y_2 - y_4 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer?

9. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszerek stacionárius pontjait. Milyen típusúak stabilitás tekintetében?
a)

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2^3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2 + y_2 - y_1y_2 - 2 \\ y_2' &= -y_1^2 - 2y_2 + y_1y_2 + 4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y_1' &= \sin y_1 + \sin y_2 \\ y_2' &= -\sin y_1 + \sin y_2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} y_1' &= (1 - y_1^2 - y_2^2)y_1 \\ y_2' &= (1 - y_1^2 - y_2^2)y_2 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} y_1' &= (y_1 - 1)^2 + y_2^2 - 2 \\ y_2' &= (y_1 + 1)^2 + y_2^2 - 2 \end{aligned}$$