Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 ősz

2. feladatsor: Potenciálfüggvény, alakzatok paraméterezése (megoldás)

---

1. Potenciálos-e az alábbi vektormező? Ha igen, adjuk meg egy potenciálját.

   a) $\mathbf{u}(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

   b) $\mathbf{u}(x,y,z) = ze^{x+\sin y}\mathbf{i} + ze^{x+\sin y}\cos y\mathbf{j} + e^{x+\sin y}\mathbf{k}$

   c) $\mathbf{u}(x,y,z) = (x^2+yz)\mathbf{i} + (y-x^2)\mathbf{j} + (z+xy)\mathbf{k}$

   Megoldás. Mindhárom vektormező az egész térben (síkon) értelmezett, tehát akkor pontenciálos, ha a rotációja 0.

   a) $\dfrac{\partial x}{\partial x} - \dfrac{\partial y}{\partial y} = 1 - 1 = 0$, tehát potenciálos. Egy potenciál

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^x u_x(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(0,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_0^x y\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y 0\,\mathrm{d}\eta = xy \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ze^{x+\sin(y)} & z\cos(y)e^{x+\sin(y)} & e^{x+\sin(y)} \\ z\cos(y)e^{x+\sin(y)} & z\cos^2(y)e^{x+\sin(y)} - z\sin(y)e^{x+\sin(y)} & \cos(y)e^{x+\sin(y)} \\ e^{x+\sin(y)} & \cos(y)e^{x+\sin(y)} & 0 \end{bmatrix}$$

   szimmetrikus, tehát a vektormező potenciálos. Egy potenciál

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,y,z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(0,\eta,z)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(0,0,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x ze^{\xi+\sin y}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y ze^{\sin\eta}\cos\eta\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z 1\,\mathrm{d}\zeta \\ &= (e^x-1)ze^{\sin y} + (e^{\sin y}-1)z + z = ze^{x+\sin y} \end{aligned}$$

   c)

$$\frac{\partial(y-x^2)}{\partial x} = -2x \neq z = \frac{\partial(x^2+yz)}{\partial y},$$

   tehát ez a vektormező nem potenciálos. ($\operatorname{rot}\mathbf{u} = x\mathbf{i} - (2x+z)\mathbf{k}$)

2. Centrális vektormezőnek nevezzük a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ alakú vektormezőket, ahol $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy minden centrális vektormező potenciálos és határozzuk meg egy potenciálfüggvényt.

   Megoldás. A szimmetria miatt elég a deriváltmátrix egy főátlón kívüli elemét számolni, pl. az első komponens y szerinti deriváltja a láncszabály alapján:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}x\right) = \left(\frac{f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2}\right)\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

   ami x és y cseréjére szimmetrikus, tehát a rotáció esetleg az origó kivételével mindenhol 0. $\mathbf{v}$ az origó körüli forgatásokra nézve szimmetrikus, így sejthetjük, hogy a potenciálfüggvény is ilyen (ha létezik). Számoljuk ki $F(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ gradiensét, ahol F tetszőleges függvény:

$$\operatorname{grad} F(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = F'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

   tehát ha $F' = f$, akkor a gradiens éppen $\mathbf{v}$. Mivel f folytonos, ilyen tulajdonságú F függvény létezik (primitív függvény).

3. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{u}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + 3xz^2\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$ vektorpotenciálos és adjuk meg egy vektorpotenciálját.

   Megoldás. A vektormező mindenhol értelmezett, $\operatorname{div}\mathbf{u} = 2x + 0 - 2x = 0$, tehát létezik vektorpotenciál.

$$\begin{aligned}
v_x(x,y,z) &= \int_0^z u_y(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^z (3x\zeta^2)\,\mathrm{d}\zeta = xz^3 \\
v_y(x,y,z) &= \int_0^x u_z(\xi,y,0)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^z u_x(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^x (-2\cdot\xi\cdot 0)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^z x^2\,\mathrm{d}\zeta = -x^2 z
\end{aligned}$$

   Eszerint $\mathbf{v}(x,y,z) = xz^3\mathbf{i} - x^2z\mathbf{j}$ egy vektorpotenciál.

4. Adjuk meg az alábbi görbék egy paraméterezését:
   a) $A = (2,1,5)$ és $B = (-1,9,11)$ pontokat összekötő szakasz
   b) origó középpontú, a és b hosszúságú, az x ill. y tengelyekkel párhuzamos féltengelyekkel rendelkező ellipszis
   c) az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ és $x + 2y = 0$ egyenletű felületek metszésvonala.

   Megoldás.
   a) Legyen $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$ a két végpont helyvektora. Ekkor $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ a szakasz paraméterezése, ha $t \in [0,1]$.
   b) Az egységkör egy kényelmes paraméterezése $\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ ($t \in [0,2\pi]$). Ebből nyújtással kapunk ellipszist: $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\sin t\mathbf{j}$.
   c) A második egyenletből $x = -2y$, amit az elsőbe írva $5y^2 + z^2 = a^2$ adódik. Az x koordináta nélkül ez egy olyan ellipszis, ami az $y - z$ síkban helyezkedik el, a tengelyek szimmetriatengelyei, tehát az előzőek mintájára $\frac{a}{\sqrt{5}}\cos t\mathbf{j} + a\sin t\mathbf{k}$ egy paraméterezésa. Az x koordinátát y meghatározza, így a metszésvonal így paraméterezhető: $\mathbf{r}(t) = -\frac{2a}{\sqrt{5}}\cos t\mathbf{i} + \frac{a}{\sqrt{5}}\cos t\mathbf{j} + a\sin t\mathbf{k}$ ($t \in [0,2\pi]$).

5. Milyen alakzat paraméterezése az $\mathbf{r}(t) = R(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}) + at\mathbf{k}$, ha $R > 0$?

   Megoldás. Az utolsó koordinátát elhagyva az $x - y$ síkban fekvő R sugarú körhöz jutunk, "egyenletesen" paraméterezve. Az utolsó koordináta eközben lineárisan növekszik, tehát az alakzat csavarvonal, ami egy R sugarú henger palástján helyezkedik el. Mivel a vetület 2π szerint periodikus, a menetemelkedés $2\pi a$.

6. Adjuk meg az $\mathbf{a} = (2,1,9)$, $\mathbf{b} = (1,5,10)$ és $\mathbf{c} = (0,4,0)$ helyvektorú pontokat tartalmazó sík egy paraméteres egyenletét és ennek segítségével írjuk fel egy normálvektorát.

   Megoldás. $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (2 - u - 2v)\mathbf{i} + (1 + 4u + 3v)\mathbf{j} + (9 + u - 9v)\mathbf{k}$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = (-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}) = -39\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

7. Tekintsük az origó középpontú egységgömb felszínét a szokásos paraméterezéssel. Adjuk meg az alábbi egyenlőtlenségek által meghatározott daraboknak megfelelő paramétertartományt:
   a) $z \geq 0$
   b) $x^2 + y^2 \leq z^2$
   c) $z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$
   d) $x \geq 0$

Megoldás. A paraméterezés $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}$, a teljes gömbfelszínt akkor fedi le egyszeresen (majdnem mindenhol), ha pl. $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, de az utóbbi intervallum szabadon eltolható

a) $\cos\vartheta \geq 0$ akkor, ha $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$

b) a feltétel: $(\sin\vartheta\cos\varphi)^2 + (\sin\vartheta\sin\varphi^2) = \sin^2\vartheta \leq \cos^2\vartheta$, tehát $(\vartheta, \varphi) \in ([0, \pi/4] \cup [3\pi/4, \pi]) \times [0, 2\pi]$

c) $\cos\vartheta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ akkor teljesül, ha $(\vartheta, \varphi) \in [\pi/4, \pi] \times [0, 2\pi]$

d) a feltétel $\sin\vartheta\cos\varphi \geq 0$, ami $\sin\vartheta \geq 0$ miatt $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ mellett teljesül.

8. Az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott térrészekhez válasszunk olyan koordinátarendszert, amelyre nézve a paramétertartomány téglatest és határozzuk is meg azt.

a) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, $x \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z \geq 0$

b) $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \leq y$, $0 \leq y$, $|z| \leq 2$

Megoldás.

a) gömbi koordinátarendszerben $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\vartheta\mathbf{k}$, a tartomány $r \in [0, \sqrt{2}]$, $\vartheta \in [0, \pi/4]$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

b) hengerkoordinátákkal $\mathbf{r}(\varrho, \phi, z) = \varrho\cos\phi\mathbf{i} + \varrho\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a tartomány $\varrho \in [0, 2]$, $\phi \in [\pi/4, \pi]$, $z \in [-2, 2]$

További gyakorló feladatok

9. Potenciálos-e az alábbi vektormező? Ha igen, adjuk meg egy potenciálját.

a) $\mathbf{u}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

b) $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$

c) $\mathbf{u}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$

Megoldás. Mindhárom vektormező az egész térben értelmezett, tehát akkor potenciálos, ha a rotációja 0.

a) A rotáció $\dfrac{\partial(x+y)}{\partial y} - \dfrac{\partial(x+z)}{\partial z} = 1 - 1 = 0$, $\dfrac{\partial(y+z)}{\partial z} - \dfrac{\partial(x+y)}{\partial x} = 1 - 1 = 0$, $\dfrac{\partial(x+z)}{\partial x} - \dfrac{\partial(y+z)}{\partial y} = 1 - 1 = 0$, tehát létezik potenciál. Egy potenciál

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x u_x(\xi, y, z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(0, \eta, z)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(0, 0, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x (y + z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y z\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z 0\,\mathrm{d}\zeta \\ &= x(y + z) + zy = xy + yz + zx \end{aligned}$$

b) A deriváltmátrix az egységmátrixszal egyenlő, tehát szimmetrikus. Emiatt a rotáció 0 és létezik potenciál.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x u_x(\xi, y, z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(0, \eta, z)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(0, 0, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x \xi\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \eta\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z \zeta\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ -y & -x & 0 \end{bmatrix}$$

nem szimmetrikus, tehát nincsen potenciál.

10. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ differenciálható és tekintsük a $\mathbf{v}(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2})\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ vektormezőt. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{v}$ potenciálos és határozzuk meg egy potenciálfüggvényét.

    Megoldás. $\mathbf{v}$ a z tengely körüli forgatásokra nézve szimmetrikus, így sejthetjük, hogy a potenciálfüggvény is ilyen (ha létezik). Számoljuk ki $F(\sqrt{x^2 + y^2})$ gradiensét, ahol F tetszőleges függvény:

$$\operatorname{grad} F(\sqrt{x^2 + y^2}) = F'(\sqrt{x^2 + y^2})\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

    tehát ha $F' = f$, akkor a gradiens éppen $\mathbf{v}$. Mivel f folytonos, ilyen tulajdonságú F függvény létezik.

11. Az origón átmenő tengely körül $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ szögsebességgel forgó test $\mathbf{r}$ helyvektorú pontjának sebessége $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$. Határozzuk meg $\mathbf{u}$ egy vektorpotenciálját.

    Megoldás. Koordinátákkal $\mathbf{u}(x, y, z) = (w_y z - w_z y)\mathbf{i} + (w_z x - w_x z)\mathbf{j} + (w_x y - w_y x)\mathbf{k}$. A divergencia számolásához a komponenseket rendre x, y és z szerint kell deriválni. Ezek a deriváltak mind 0-val egyenlőek, tehát $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, vagyis létezik vektorpotenciál. Egy lehetséges vektorpotenciál komponensfüggvényei:

$$\begin{aligned}
v_x(x, y, z) &= \int_0^z u_y(x, y, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^z (w_z x - w_x \zeta)\,\mathrm{d}\zeta = w_z x z - w_x \frac{z^2}{2} \\
v_y(x, y, z) &= \int_0^x u_z(\xi, y, 0)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^z u_x(x, y, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^x (w_x y - w_y \xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^z (w_y \zeta - w_z y)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= w_x x y + w_z y z - w_y \frac{x^2 + z^2}{2} \\
v_z(x, y, z) &= 0.
\end{aligned}$$

12. Adjuk meg az $x^2 + y^2 = z^2$ kúpfelület és az $x + z = 1$ egyenletű sík metszésvonalának egy paraméterezését.

    Megoldás. A második egyenletből $z = 1 - x$, ezt az elsőbe írva

$$x^2 + y^2 = (1 - x)^2 = 1 + x^2 - 2x,$$

    tehát $1 - y^2 = 2x$. Eszerint x és z kifejezhető y segítségével, válasszuk ezt paraméternek: $t = y$. A paraméterezés

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1 - t^2}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1 + t^2}{2}\mathbf{k},$$

    ahol $t \in \mathbb{R}$.

13. Az $y^2 + z^2 = a^2$ és $x^2 + z^2 = b^2$ egyenletű hengerfelületek metszésvonala $a \neq b$ esetén két zárt görbéből áll. Adjuk meg ezek egy-egy paraméterezését az $a < b$ esetben.

    Megoldás. A két görbe a nagyobb sugarú henger egy-egy oldalán helyezkedik el, tehát az egyik az $x < 0$, a másik az $x > 0$ félsíkban. Emiatt megtehetjük, hogy a kisebb sugarú henger yz síkra való vetületét (a sugarú kör) paraméterezzük, és a második egyenletből kifejezzük az x értékeket. Ebből a következő paraméterezések adódnak ($t \in [0, 2\pi]$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 t}\,\mathbf{i} + a \cos t\,\mathbf{j} + a \sin t\,\mathbf{k} \\
\mathbf{r}(t) &= -\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 t}\,\mathbf{i} + a \cos t\,\mathbf{j} + a \sin t\,\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

14. Adjuk meg az $x^2+y^2-z^2=1$ egyenletű egyköpenyű forgáshiperboloid egy paraméteres egyenletét és határozzuk meg minden pontjában a normálvektorát.

Megoldás. $\mathbf{r}(u,v)=\cosh u\cos v\mathbf{i}+\cosh u\sin v\mathbf{j}+\sinh u\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}&=(\sinh u\cos v\mathbf{i}+\sinh u\sin v\mathbf{j}+\cosh u\mathbf{k})\times(-\cosh u\sin v\mathbf{i}+\cosh u\cos v\mathbf{j})\\&=-\cosh^2 u\cos v\mathbf{i}-\cosh^2 u\sin v\mathbf{j}+\cosh u\sinh u\mathbf{k}\end{aligned}$$

15. Forgassuk meg az $y=f(x)$ függvény grafikonját az x tengely körül. Határozzuk meg a kapott felület egy paraméterezését.

Megoldás. $\mathbf{r}(t,\phi)=t\mathbf{i}+f(t)\cos\phi\mathbf{j}+f(t)\sin\phi\mathbf{k}$, ahol $t\in\mathbb{R}$, $\phi\in[0,2\pi]$.

16. Egy egyenes körhenger tengelyének két végpontja $A=(2,2,7)$ és $B=(-1,5,3)$. Adjuk meg a henger palástjának egy paraméterezését, ha a henger sugara 3.

Megoldás. A két végpontot összekötő (irány)vektor $\mathbf{v}=-3\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$. A hengernek erre merőleges síkmetszetei körök, a paraméterezéshez a legegyszerűbb, ha keresünk két $\mathbf{v}$-re és egymásra is merőleges egységvektort (egyet könnyű találni, a harmadik vektoriális szorzással előállítható). Ilyenek pl. $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ és $\mathbf{w}=\frac{1}{\sqrt{17}}(-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k})$. Ezzel a paraméterezés

$$\mathbf{r}(\phi,t)=\mathbf{a}+t\mathbf{v}+3\cos\phi\mathbf{u}+3\sin\phi\mathbf{w},$$

ahol $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ az A pont helyvektora, $\phi\in[0,2\pi]$ és $t\in[0,1]$.

17. Tekintsük azt a tóruszt, amelynek középköre R sugarú, az $x-y$ síkban fekszik, középpontja az origó, és amelynek a keresztmetszete $r<R$ sugarú kör. Adjuk meg a tórusz felületének egy paraméterezését.

Megoldás. $\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)=(R+r\sin\vartheta)\cos\varphi\mathbf{i}+(R+r\sin\vartheta)\sin\varphi\mathbf{j}+r\cos\vartheta\mathbf{k}$. Egy lehetséges paramétertartomány $(\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

18. Az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott térrészekhez válasszunk olyan koordinátarendszert, amelyre nézve a paramétertartomány téglatest és határozzuk is meg azt.
   a) $2\le x^2+y^2+z^2\le 4$, $y\le 0$
   b) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2\le 25$
   c) $x^2+y^2+z^6\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$
   d) $(x-z)^2+4y^2\le 4$, $0\le z\le 1$

Megoldás.
   a) gömbi koordinátákkal: $\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi)=r\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i}+r\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j}+r\cos\vartheta\mathbf{k}$, $(r,\vartheta,\varphi)\in[\sqrt{2},2]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$.
   b) eltolt gömbi koordinátákkal: $\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi)=(3+r\sin\vartheta\cos\varphi)\mathbf{i}+(-2+r\sin\vartheta\sin\varphi)\mathbf{j}+(1+r\cos\vartheta)\mathbf{k}$, $(r,\vartheta,\varphi)\in[0,5]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$.
   c) az $x-y$ síkban polárkoordinátákat használhatunk, a sík egy pontja feletti egyenesszakaszt pedig konstans határokkal paraméterezhetjük, pl. $\mathbf{r}(\rho,\phi,h)=\rho\cos\phi\mathbf{i}+\rho\sin\phi\mathbf{j}+\sqrt[6]{1-\rho^2}h\mathbf{k}$, $(\rho,\phi,h)\in[0,1]\times[0,\pi/2]\times[-1,1]$.
   d) induljuk ki a szokásos hengerkoordinátákból, de y irányban felére összenyomva, x irányban pedig a z koordinátával arányosan eltolva: $\mathbf{r}(\rho,\phi,h)=(h+\rho\cos\phi)\mathbf{i}+\frac{1}{2}\rho\sin\phi\mathbf{j}+h\mathbf{k}$, $(\rho,\phi,h)\in[0,2]\times[0,2\pi]\times[0,1]$.