Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

4. feladatsor: Felszín, felszíni és felületi integrál (megoldás)

---

1. Forgassuk meg az $y = f(x)$ differenciálható függvény grafikonját az x tengely körül. Írjuk fel a kapott forgástest egy paraméteres egyenletét. Mekkora az $a \le x \le b$ sávba eső rész felszíne?

   Megoldás. $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + f(u)\cos v\mathbf{j} + f(u)\sin v\mathbf{k}$ paraméterezéssel

   $$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= (\mathbf{i} + f'(u)\cos v\mathbf{j} + f'(u)\sin v\mathbf{j}) \times (-f(u)\sin v\mathbf{j} + f(u)\cos v\mathbf{k}) \\ &= f(u)f'(u)\mathbf{i} - f(u)\cos v\mathbf{j} - f(u)\sin v\mathbf{k},\end{aligned}$$

   ebből

   $$A = \int_a^b \int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 2\pi \int_a^b f(u)\sqrt{1 + f'(u)}\,\mathrm{d}u.$$

2. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ egyenletű gömbfelület $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ egyenletű hengeren belüli részének a felszínét.

   Megoldás. Elég a $z \ge 0$ felét kiszámolni. Legyen a paraméterezés $\mathbf{r}(r,\phi) = r\cos\phi\mathbf{i} + r\sin\phi\mathbf{j} + \sqrt{4-r^2}\mathbf{k}$, ekkor

   $$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= (\cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j} - \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}) \times (-r\sin\phi\mathbf{i} + r\cos\phi\mathbf{j}) \\ &= \frac{r^2\cos\phi}{\sqrt{4-r^2}}\mathbf{i} + \frac{r^2\sin\phi}{\sqrt{4-r^2}}\mathbf{j} + r\mathbf{k} \\ \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right| &= \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\end{aligned}$$

   A paramétertartomány $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $r \in [0, 2\cos\phi]$, tehát

   $$\begin{aligned}A &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\phi} \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = -4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\sqrt{4-r^2}\right]_{r=0}^{r=2\cos\phi} \mathrm{d}\phi \\ &= 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - |\sin\varphi|)\,\mathrm{d}\varphi = 8\pi - 16\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 8\pi - 16.\end{aligned}$$

3. Hol van a tömegközéppontja az origó középpontú, vékony, R sugarú, egyenletes μ felületi tömegsűrűségű gömbhéj, $z \ge 0$ féltérbe eső részének?

   Megoldás. $\mathbf{r}(\vartheta,\varphi) = R\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + R\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + R\cos\vartheta\mathbf{k}$, $(\vartheta,\varphi) \in [0,\pi/2] \times [0,2\pi]$

   $$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= (R\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + R\cos\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} - R\sin\vartheta\mathbf{k}) \times (-R\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{i} + R\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{j}) \\ &= R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\mathbf{k} \rightsquigarrow \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right| = R^2\sin\vartheta\end{aligned}$$

   tömeg:

   $$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mu R^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\mu R^2$$

tömegközéppont x, y koordinátája:

$$x_{\text{tk}} = \frac{1}{2\pi\mu R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\mu R^2\sin\vartheta(R\sin\vartheta\cos\varphi)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 0$$
$$y_{\text{tk}} = \frac{1}{2\pi\mu R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\mu R^2\sin\vartheta(R\sin\vartheta\sin\varphi)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

tömegközéppont z koordinátája:

$$\begin{aligned} z_{\text{tk}} &= \frac{1}{2\pi\mu R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\mu R^2\sin\vartheta(R\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2}2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{R}{2}\Big[\sin^2\vartheta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{R}{2}\end{aligned}$$

4. Az $\mathbf{r}(u,v) = e^u\cos v\mathbf{i} + e^u\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, $u \le 0$, $v \in [0, 2\pi]$ tölcsér felületi tömegsűrűségét a $\mu(x,y,z) = 1 + x$ függvény írja le. Mekkora a tömege?

   Megoldás.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} &= (e^u\cos v\mathbf{i} + e^u\sin v\mathbf{j} + \mathbf{k})\times(-e^u\sin v\mathbf{i} + e^u\cos v\mathbf{j}) \\ &= -e^u\cos v\mathbf{i} - e^u\sin v\mathbf{j} + e^{2u}\mathbf{k}\end{aligned}$$

   A megadott paraméterezést használva $\mu(\mathbf{r}(u,v)) = 1 + e^u\cos v$, tehát a tömeg:

$$\begin{aligned} m &= \int\mu\,\mathrm{d}S = \int_{-\infty}^0\int_0^{2\pi}\mu(\mathbf{r}(u,v))\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^0\int_0^{2\pi}(1 + e^u\cos v)\sqrt{e^{2u} + e^{4u}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^0 e^u\sqrt{1 + e^{2u}}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\pi\int_0^{\operatorname{arsinh}1}\cosh^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2t\right]_0^{\operatorname{arsinh}1} = \sqrt{2}\pi + \pi\operatorname{arsinh}1 = 7{,}2117\ldots,\end{aligned}$$

   ahol az u szerinti integrál $e^u = \sinh t$, $e^u\,\mathrm{d}u = \cosh t\,\mathrm{d}t$ helyettesítéssel számolható.

5. Mi az $\mathbf{u}(x,y,z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormező integrálja az $\mathbf{r}(u,v) = (u+2v)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k}$ felület $(u,v) \in [0,3]\times[0,1]$ darabján $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$ irányítás mellett?

   Megoldás.

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})\times(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) = (u+2v)\mathbf{i} - v\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k}$$
$$\iint_S\mathbf{u}\cdot d\mathbf{A} = \int_0^1\int_0^3(-6v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -9$$

6. Határozza meg az $\mathbf{u}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u}(x,y,z) = (x^2 + 2xy - xz)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$$

   vektormező integrálját az origó középpontú $R = 2$ sugarú gömb felületére kifelé mutató irányítás mellett.

Megoldás. Használjuk a szokásos paraméterezést: $\mathbf{r}(\vartheta,\varphi) = R(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k})$, ekkor

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = R^2\sin\vartheta(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}),$$

ami kifelé mutat, a paramétertartomány $(\vartheta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)) = R^2(\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + 2\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi - \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi)\mathbf{i}\\ - R^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\mathbf{j} - R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Az integrál eszerint

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)) \cdot \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\\ &= R^4\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\Big(\sin^4\vartheta\cos^3\varphi + 2\sin^4\vartheta\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi\\ &\quad - \sin^4\vartheta\sin^3\varphi - \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\cos\varphi\Big)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\\ &= -\pi R^4\int_0^\pi \cos\vartheta\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = 0.\end{aligned}$$

További gyakorló feladatok

7. Mekkora az $\mathbf{r}(u,v) = e^u(\cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + \mathbf{k})$ felület $(u,v) \in [0,1] \times [0,\pi/4]$ paramétertartománynak megfelelő darabjának a felszíne?

   Megoldás.

   $$|e^u(\cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times e^u(-\sin v\mathbf{i} + \cos v\mathbf{j})| = e^2u|-\cos v\mathbf{i} - \sin v\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{2}e^{2u}$$

   $$\int_0^1\int_0^{\pi/4}\sqrt{2}e^{2u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}(e^2-1)$$

8. Mekkora a felszíne az $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

   $$\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$$

   felület $u^2+v^2 \le 1$ paramétertartománynak megfelelő darabjának?

   Megoldás. $|(\mathbf{i} + v\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + u\mathbf{k})| = |-v\mathbf{i} - u\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1+u^2+v^2}$

   $$\begin{aligned}A &= \int_{u^2+v^2\le 1}\sqrt{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1+r^2}\cdot r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) = 3{,}8294\ldots\end{aligned}$$

9. Számítsuk ki az M tömegű, homogén tömegeloszlású, $x^2+y^2 = R^2$, $|z| \le \frac{h}{2}$ egyenletű hengerpalást tehetetlenségi nyomatékát a koordinátatengelyekre nézve.

   Megoldás. Egy paraméterezés $\mathbf{r}(\phi,z) = R\cos\phi\mathbf{i} + R\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a paramétertartomány $(\phi,z) \in [0,2\pi] \times [-h/2,h/2]$. Ekkor

   $$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right| = |(-R\sin\phi\mathbf{i} + R\cos\phi\mathbf{j}) \times \mathbf{k}| = R$$

A palást felszíne $2\pi Rh$, tehát a felületi tömegsűrűség $\mu = \frac{M}{2\pi Rh}$. A tehetetlenségi nyomatékok számolásához a koordinátafüggvények négyzeteit kell integrálni:

$$\int \mu x^2 \,\mathrm{d}S = \frac{M}{2\pi Rh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2\phi \cdot R \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}z = \frac{M}{2\pi Rh} R^3 h\pi = \frac{MR^2}{2}$$

$$\int \mu y^2 \,\mathrm{d}S = \frac{M}{2\pi Rh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2\phi \cdot R \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}z = \frac{M}{2\pi Rh} R^3 h\pi = \frac{MR^2}{2}$$

$$\int \mu z^2 \,\mathrm{d}S = \frac{M}{2\pi Rh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} z^2 \cdot R \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}z = \frac{M}{2\pi Rh} 2\pi R \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{Mh^2}{12}.$$

Két ilyen integrál összege a harmadik tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, tehát rendre az x, y és z tengelyekre: $\frac{1}{12}M(h^2+6R^2)$, $\frac{1}{12}M(h^2+6R^2)$ és MR^2.

10. Integráljuk a $\mathbf{v}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + (2x+z)\mathbf{k}$ vektormezőt az $\mathbf{r}(u,v) = (u+2v)\mathbf{i} - v\mathbf{j} + (u^2+3v)\mathbf{k}$ felület $0 \le u \le 3$, $-2 \le v \le 0$ paramétertartománynak megfelelő darabján $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ irányítás mellett.

    Megoldás.

    $$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i} + 2u\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 2u\mathbf{i} + (-3+4u)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

    és $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) = (-uv - 2v^2)\mathbf{i} + (2u + u^2 + 7v)\mathbf{k}$ felhasználásával

    $$\begin{aligned}\int \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_{-2}^{0} \int_0^3 \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\ &= \int_{-2}^{0} \int_0^3 ((-uv-2v^2)\mathbf{i} + (2u+u^2+7v)\mathbf{k}) \cdot (2u\mathbf{i} + (-3+4u)\mathbf{j} - \mathbf{k}) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\ &= \int_{-2}^{0} \int_0^3 (-2u - u^2 - 7v - 2u^2 v - 4uv^2) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = -11.\end{aligned}$$

11. Integráljuk a $\mathbf{v}(x,y,z) = (x+y)\mathbf{i} + z^2\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2+4y^2+9z^2 = 1$ egyenletű felületen kifelé (a z tengelytől távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

    Megoldás. A felületet paraméterezhetjük $\mathbf{r}(\vartheta,\varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \frac{1}{3}\cos\vartheta\mathbf{k}$ módon, ekkor

    $$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= \left(\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \frac{1}{2}\cos\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} - \frac{1}{3}\sin\vartheta\mathbf{k}\right) \times \left(-\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{j}\right) \\ &= \sin\vartheta\left(\frac{1}{6}\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \frac{1}{3}\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \frac{1}{2}\cos\vartheta\right).\end{aligned}$$

    $\mathbf{v}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)) = \left(\sin\vartheta\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)\mathbf{i} + \frac{1}{9}\cos^2\vartheta\mathbf{k}$ felhasználásával az integrál:

    $$\begin{aligned}\int \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{6}\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \frac{1}{12}\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\cos^3\vartheta}{18}\right) \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin^2\vartheta}{12} + \frac{\cos^3\vartheta}{18}\right) \mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$