Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 ősz

4. feladatsor: Felszín, felszíni és felületi integrál

---

1. Forgassuk meg az $y = f(x)$ differenciálható függvény grafikonját az x tengely körül. Írjuk fel a kapott forgástest egy paraméteres egyenletét. Mekkora az $a \le x \le b$ sávba eső rész felszíne?
2. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ egyenletű gömbfelület $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ egyenletű hengeren belüli részének a felszínét.
3. Hol van a tömegközéppontja az origó középpontú, vékony, R sugarú, egyenletes μ felületi tömegsűrűségű gömbhéj, $z \ge 0$ féltérbe eső részének?
4. Az $\mathbf{r}(u,v) = e^u \cos v\mathbf{i} + e^u \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, $u \le 0$, $v \in [0, 2\pi]$ tölcsér felületi tömegsűrűségét a $\mu(x,y,z) = 1 + x$ függvény írja le. Mekkora a tömege?
5. Mi az $\mathbf{u}(x,y,z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormező integrálja az $\mathbf{r}(u,v) = (u+2v)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k}$ felület $(u,v) \in [0,3] \times [0,1]$ darabján $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ irányítás mellett?
6. Határozza meg az $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

   $$\mathbf{u}(x,y,z) = (x^2 + 2xy - xz)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$$

   vektormező integrálját az origó középpontú $R = 2$ sugarú gömb felületére kifelé mutató irányítás mellett.

További gyakorló feladatok

7. Mekkora az $\mathbf{r}(u,v) = e^u(\cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + \mathbf{k})$ felület $(u,v) \in [0,1] \times [0, \pi/4]$ paramétertartománynak megfelelő darabjának a felszíne?
8. Mekkora a felszíne az $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

   $$\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$$

   felület $u^2 + v^2 \le 1$ paramétertartománynak megfelelő darabjának?
9. Számítsuk ki az M tömegű, homogén tömegeloszlású, $x^2 + y^2 = R^2$, $|z| \le \frac{h}{2}$ egyenletű hengerpalást tehetetlenségi nyomatékát a koordinátatengelyekre nézve.
10. Integráljuk a $\mathbf{v}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + (2x+z)\mathbf{k}$ vektormezőt az $\mathbf{r}(u,v) = (u+2v)\mathbf{i} - v\mathbf{j} + (u^2+3v)\mathbf{k}$ felület $0 \le u \le 3$, $-2 \le v \le 0$ paramétertartománynak megfelelő darabján $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ irányítás mellett.
11. Integráljuk a $\mathbf{v}(x,y,z) = (x+y)\mathbf{i} + z^2\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ egyenletű felületen kifelé (a z tengelytől távolodó irányba) mutató irányítás mellett.