

Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 őszi

5. feladatsor: Térfogati integrál

1. Határozzuk meg annak a tórusznak a térfogatát, aminek a középköre R sugarú, a keresztmetszete pedig r sugarú, $r < R$.
2. Az $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{2z}{h}\right)^{2n} \leq 1$ tartományt homogén anyagú, m tömegű test tölti ki ($R, h > 0$). Mekkora a koordinátatengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka? Mi történik, ha $n \rightarrow \infty$?
3. Mennyi az m tömegű egyenletes tömegeloszlású vékony R sugarú kör alakú drót egy átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka? Oldjuk meg a feladatot kétféleképp: a drótot kis keresztmetszetű tórusznak tekintve térfogati integrállal illetve vonalnak tekintve skalármező görbementi integrálásával.
4. Számítsuk ki az m tömegű egyenletes tömegeloszlású vékony R sugarú gömbhéj egy átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. Oldjuk meg a feladatot kétféleképp: a gömbhéjat az $R + \epsilon$ és R sugarú gömbök közti térrésznek gondolva térfogati integrállal illetve felületnek tekintve skalármező felszíni integrálásával.

További gyakorló feladatok

5. Mekkora a térfogata az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ gömb és a $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ henger metszetének? (Viviani-féle test)
6. Mennyi az $f(x, y, z) = xyz$ függvény integrálja az $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq h$ hengeren?
7. Integráljuk az $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvényt az $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ gömbön.
8. Integráljuk az $f(x, y, z) = xy$ függvényt az $x^2 + y^2 \leq z^2$ kúp $0 \leq z \leq 2$, $0 \leq x$, $0 \leq y$ egyenlőtlenségek által meghatározott darabján.
9. Tekintsük azt a homogén tömegeloszlású tömör tóruszt, amelynek középköre az $x - y$ síkban fekszik, középpontja az origó, a sugara pedig R , és amelynek a keresztmetszete r sugarú ($r < R$). Hol van a tömegközéppontja a $0 \leq x \leq y$ egyenlőtlenség által meghatározott darabjának?
10. Számítsuk ki az M tömegű, a élhosszúságú (tömör) szabályos oktaéder tehetetlenségi nyomatékát a középpontján áthaladó tengelyekre vonatkozóan.