Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 ősz

6. feladatsor: Integrálátalakító tételek

---

1. Mennyi az $\mathbf{u}(x,y,z) = x(x-2xy+2yz^2)\mathbf{i} - y(2x^2+4xyz+yz^2)\mathbf{j} + 2xz(x+2y+2yz)\mathbf{k}$ vektormező integrálja a $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ egységkocka felületén kifelé mutató irányítás mellett?
2. Határozzuk meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = -xz\mathbf{i} + (-xy+2xz-yz)\mathbf{j} + (x^2+xz+z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját azon az irányított felületen, amely az $x^2+y^2 \le 1$, $0 \le z \le 10-x$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartomány kifelé irányított felületéből a $z=0$ síkba eső alapkör elhagyásával keletkezik.
3. Integráljuk az $\mathbf{u}(x,y,z) = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ vektormezőt az ABC háromszögvonalon (ebben az irányban), ahol $A=(a,0,0)$, $B=(0,a,0)$ és $C=(0,0,a)$, $a>0$.
4. Integráljuk a $\mathbf{v}(x,y,z) = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ vektormezőt az $x^2+y^2=a^2$ egyenletű körön pozitív forgásiránnyal.

További gyakorló feladatok

5. Számítsuk ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x+y+z \le 3$ tetraéder felületén kifelé mutató irányítás mellett.
6. Mennyi az $\mathbf{u}(x,y,z) = (xy+5z^2)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + (xz-y^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálja annak a tetraédernek a felületén kifelé mutató irányítás mellett, amelynek csúcsai $(1,-2,3)$, $(0,-1,1)$, $(0,-3,0)$, $(4,3,3)$?
7. Mennyi az $\mathbf{u}(x,y,z) = (xy+yz)\mathbf{i} + (x^2-yz)\mathbf{j} + (2xy+z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálja az
$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} & \text{ha } t \in [0,1] \\ \mathbf{i} + \mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k} & \text{ha } t \in [1,2] \\ (3-t)\mathbf{i} + (3-t)^2\mathbf{j} + \mathbf{k} & \text{ha } t \in [2,3] \\ (4-t)\mathbf{k} & \text{ha } t \in [3,4] \end{cases}$$
görbe $t \in [0,4]$ darabján?
8. Határozzuk meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = (xy^2 - y^2z + x^2)\mathbf{i} + (x^2y - xyz)\mathbf{j} + (yz^2 - x^2z)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $\mathbf{r}(t) = (t^3+t)\mathbf{i} + \sqrt{4+3t^2-t^4}\mathbf{j}$ görbe $t \in [-2,2]$ intervallumnak megfelelő szakaszán.
9. Bizonyítsuk be az alábbi parciális integrálási formulát, ahol f skalármező, $\mathbf{u}$ vektormező, S peremes irányított felület:
$$\int_S (f \operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_{\partial S} f\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_S (\operatorname{grad} f \times \mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$
10. Bizonyítsuk be, hogy egy T síkidom területét
$$A = \oint_{\partial T} x\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_{\partial T} y\mathbf{i} \cdot d\mathbf{r}$$
módon is számíthatjuk és ennek segítségével határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j}$ görbével határolt asztroid területét.