# Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 ősz

# 7. feladatsor: Szukcesszív approximáció, néhány egyenlettípus (megoldás)

1. Számoljuk ki az $y'(x) = y(x)^2 - (x+1)y(x) + 1$ differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első két közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel $y(0) = 1$.

   *Megoldás.* A 0. függvény konstans $\varphi_0(x) = y(0) = 1$, a függvénysorozat többi tagját rekurzióval definiáljuk:

   $$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x (\varphi_k(\xi)^2 - (\xi+1)\varphi_k(\xi) + 1)\,\mathrm{d}\xi,$$

   ennek alapján

   $$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= 1\\ \varphi_1(x) &= 1 + x - \frac{x^2}{2}\\ \varphi_2(x) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20}.\end{aligned}$$

2. Számoljuk ki az $y'(x) = y(x)$ differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első négy közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel $y(0) = 1$.

   *Megoldás.* A $\varphi_0(x) = y(0) = 1$ függvényből kiindulva

   $$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x \varphi_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

   ennek alapján a függvénysorozat első négy tagja

   $$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= 1\\ \varphi_1(x) &= 1 + x\\ \varphi_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2}\\ \varphi_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\\ \varphi_4(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.\end{aligned}$$

   Ebből egyébként rájöhetünk az általános tag alakjára:

   $$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!},$$

   ezt teljes indukcióval lehet bizonyítani. A kapott függvénysorozat minden korlátos intervallumon egyenletesen konvergál az $y(x) = e^x$ függvényhez, ez megoldja a Cauchy-feladatot.

3. Oldjuk meg az $y' = e^{-y}\sin^2 x$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   *Megoldás.* Az egyenlet szétválasztható, ráadásul $e^{-y}$ sehol sem 0, tehát mindkét oldalt eloszthatjuk vele: $e^y y' = \sin^2 x$. Ezután integráljuk mindkét oldalt $x_0 = 0$-tól $x$-ig:

   $$\begin{aligned}\int_0^x e^{y(\xi)} y'(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^x \sin^2\xi\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \frac{1-\cos 2\xi}{2}\,\mathrm{d}\xi\\ e^{y(x)} - e^{y(0)} &= \left[\frac{\xi}{2} - \frac{\sin 2\xi}{4}\right]_{\xi=0}^{\xi=x}\\ e^{y(x)} - 1 &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x.\end{aligned}$$

Ebből $y(x)$ kifejezhető:

$$y(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right).$$

4. Egy test zuhan függőlegesen a gravitáció és a sebesség négyzetével arányos közegellenállás hatására. A mozgást az $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ magasság-idő-függvény írja le, ami eleget tesz a

$$y''(t) = -g + \alpha y'(t)^2$$

differenciálegyenletnek. A $t = 0$ pillanatban a test áll és $y(0) = h$ magasan tartózkodik. Hogyan mozog ezután?

*Megoldás.* $v = y'$ helyettesítéssel $v' = -g + \alpha v^2$ szétválasztható, a megoldása

$$t = \int_0^t d\tau = \int_0^t \frac{v'(\tau)}{\alpha v(\tau)^2 - g} d\tau = \int_0^{v(t)} \frac{1}{\alpha\nu^2 - g} d\nu = -\frac{\operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{g}}v(t)\right)}{\sqrt{\alpha g}},$$

amiből $v(t)$ meghatározható:

$$v(t) = -\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\alpha g}t\right)$$

ezt integrálva

$$\begin{aligned} y(t) &= h + \int_0^t v(\tau)d\tau = h - \sqrt{\frac{g}{\alpha}}\int_0^t \tanh(\sqrt{\alpha g}\tau)d\tau \\ &= h - \sqrt{\frac{g}{\alpha}}\left[\frac{\ln\cosh(\sqrt{\alpha g}t)}{\sqrt{\alpha g}}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} = h - \frac{1}{\alpha}\ln\cosh(t\sqrt{g\alpha}) \end{aligned}$$

Érdemes a kapott függvényt összehasonlítani a közegellenállás nélküli zuhanást leíró jól ismert $h - \frac{g}{2}t^2$ függvénnyel. Ehhez fejtsük sorba a megoldást $t = 0$ körül (vagy $\alpha = 0$ körül $\alpha$ szerint, ez ugyanazt adja):

$$h - \frac{g}{2}t^2 + \frac{g^2\alpha}{12}t^4 - \frac{g^3\alpha^2}{45}t^6 + \dots.$$

5. Oldjuk meg az $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ differenciálegyenletet $y(3) = 4$ kezdeti feltétel mellett.

*Megoldás.* Osszuk el mindkét oldalt $x$-szel (nem 0 az $x_0 = 3$ pont egy környezetében):

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

tehát a jobb oldal csak $y/x$-től függ. $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel és $xu = y$, $u + xu' = y'$ felhasználásával $x > 0$ esetén az

$$u + xu' = u + \sqrt{1 + u^2}$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$\frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{x}$$

$$\int_3^x \frac{u'(\xi)}{\sqrt{1 + u(\xi)^2}}\,\mathrm{d}\xi = \int_3^x \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\operatorname{arsinh} u(x) - \operatorname{arsinh}\frac{4}{3} = \ln\frac{x}{3}$$

és így a megoldás

$$y(x) = xu(x) = x\sinh\left(\operatorname{arsinh}\frac{4}{3} + \ln\frac{x}{3}\right).$$

## További gyakorló feladatok

6. Számoljuk ki az $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$ differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első három közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel $y(1) = 1$.

   *Megoldás.* A kezdeti függvény konstans $\varphi_0(x) = 1$, a továbbiakat

   $$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_1^x \frac{\varphi_k(\xi)}{\xi}\, \mathrm{d}\xi$$

   módon definiáljuk. Ebből

   $$\begin{aligned}
   \varphi_0(x) &= 1 \\
   \varphi_1(x) &= 1 + \ln x \\
   \varphi_2(x) &= 1 + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2} \\
   \varphi_3(x) &= 1 + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{(\ln x)^3}{6}
   \end{aligned}$$

   adódik, ami alapján rájöhetünk, hogy

   $$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(\ln x)^n}{n!},$$

   ennek limesze ($x > 0$ esetén) $y(x) = e^{(\ln x)} = x$, ami megoldja a kezdetiérték-problémát.

7. Szukcesszív approximáció segítségével határozzuk meg az $y'(x) = x + y(x)$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását.

   *Megoldás.* A függvénysorozat 0. tagja $\varphi_0(x) = 1$, a továbbiakat a

   $$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x (\xi + \varphi_k(\xi))\, \mathrm{d}\xi$$

   rekurzió határozza meg. Az első néhány függvény

   $$\begin{aligned}
   \varphi_0(x) &= 1 \\
   \varphi_1(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} \\
   \varphi_2(x) &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6} \\
   \varphi_3(x) &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} \\
   \varphi_4(x) &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120},
   \end{aligned}$$

   ebből sejthetjük, hogy

   $$\varphi_k(x) = -1 - x + 2\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

   Valóban:

   $$\begin{aligned}
   1 + \int_0^x (\xi + \varphi_k(\xi)) d\xi &= 1 + \int_0^x (-1 + 2\sum_{i=0}^{k} \frac{\xi^i}{i!} + \frac{\xi^{k+1}}{(k+1)!}) d\xi \\
   &= 1 - x + 2\sum_{i=0}^{k} \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \\
   &= 1 - x + 2\sum_{i=1}^{k+1} \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \varphi_{k+1}(x).
   \end{aligned}$$

A függvénysorozat mindenhol abszolút konvergens, határértéke

$$y(x) = \lim_{k\to\infty} -1 - x + 2\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = -1 - x + 2e^x$$

Ez megoldja az egyenletet:

$$(-1 - x + 2e^x)' = -1 + 2e^x = x + (-1 - x + 2e^x).$$

8. Határozzuk meg a $(2x+1)y' - 3y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   *Megoldás.* Az egyenlet

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x+1}$$

alakra hozható, ha $y \neq 0$ és $x \neq -\frac{1}{2}$ (ha $y$ valahol 0, akkor mindenhol az az egyenlet alapján). Integráljuk mindkét oldalt felhasználva, hogy $y$ és $y_0$ egyező előjelű:

$$\ln\frac{y}{y_0} = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(\xi)}{y(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{3}{2\xi+1} d\xi = \frac{3}{2}\ln\frac{1+2x}{1+2x_0}$$

azaz

$$y(x) = y_0\left(\frac{1+2x}{1+2x_0}\right)^{3/2}$$

Az értelmezési tartomány $(-\infty, -\frac{1}{2})$ vagy $(-\frac{1}{2}, \infty)$. Látszólag két szabad paraméter van, de az előjelre ügyelve a nevezőt kihozhatjuk a zárójelből, és $y_0$-val összevonhatjuk:

$$y(x) = C|1+2x|^{3/2},$$

ahol $C$ bármilyen előjelű lehet.

9. Határozzuk meg az $(1+x^2)y' + (1+y^2) = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   *Megoldás.* Az egyenlet szétválasztható:

$$\frac{y'}{1+y^2} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Mivel nincsen megadva kezdeti feltétel, egyszerűbb határozatlan integrállal folytatni, ügyelve arra, hogy a két oldal egy-egy primitív függvénye konstansban eltérhet egymástól:

$$\arctan y(x) = C - \arctan x$$

tehát $y(x) = \tan(C - \arctan x)$. Egyszerűbb alakot kaphatunk

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

felhasználásával:

$$y(x) = \tan(C - \arctan x) = \frac{\tan C - x}{1 + (\tan C)x}$$

vagy $\tan C$ helyett $C$-t írva (ez is tetszőleges konstans!):

$$y(x) = \frac{C - x}{1 + Cx}.$$

10. Oldjuk meg az $y'' = -2xy'^2$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

*Megoldás.* Vezessük be a $v = y'$ jelölést, erre a függvényre nézve az egyenlet elsőrendű: $v' = -2xv^2$, ami szétválasztható. A kezdeti feltétel $v(0) = y'(0) = 1$, tehát

$$
\begin{aligned}
\frac{v'}{v^2} &= -2x \\
\int_0^x \frac{v'(\xi)}{v(\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^x (-2\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
-\frac{1}{v(x)} + \frac{1}{v(0)} &= -x^2 \\
v(x) &= \frac{v(0)}{1+v(0)x^2} = \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

Integrálással kapjuk a megoldást:

$$y(x) = y(0) + \int_0^x v(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \arctan x.$$

11. Oldjuk meg a $2xyy' = y^2 - x^2$ differenciálegyenletet $y(1) = 1$ kezdeti feltétellel.

*Megoldás.* A kezdeti feltétel környezetében $2xy \neq 0$, így eloszthatjuk vele az egyenletet:

$$y' = \frac{1}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{x}{y},$$

a jobb oldal csak $y/x$-től függ, így $y = xu$ helyettesítést alkalmazhatunk. Ekkor $y' = u + xu'$, tehát

$$
\begin{aligned}
u' &= \frac{y'-u}{x} = \frac{y}{2x^2} - \frac{1}{2y} - \frac{u}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{u}{2} - \frac{1}{2u} - u\right) = \frac{-1}{2x}\left(u + \frac{1}{u}\right) \\
\frac{2uu'}{1+u^2} &= -\frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

Mindkét oldalt integrálva $x > 0$ esetén

$$\ln\frac{x_0}{x} = -\int_{x_0}^x \frac{1}{\xi}d\xi = \int_{u(x_0)}^{u(x)} \frac{2u}{1+u^2}du = \left[\ln(1+u^2)\right]_{u(x_0)}^{u(x)} = \ln\frac{1+u(x)^2}{1+u(x_0)^2}$$

tehát a megoldás

$$y(x) = xu(x) = \sqrt{x_0\left(1 + \frac{y_0^2}{x_0^2}\right)x - x^2} = \sqrt{2x - x^2}.$$

12. Oldjuk meg az $xy' = y - x\cos^2\frac{y}{x}$ differenciálegyenletet.

*Megoldás.* $x \neq 0$ esetén az egyenlet

$$y' = \frac{y}{x} - \cos^2\frac{y}{x},$$

ahol a jobb oldal csak $y/x$ függvénye. $y = xu$ helyettesítéssel $y' = u + xu'$, tehát

$$
\begin{aligned}
u' &= \frac{y'-u}{x} = \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}\cos^2\frac{y}{x} - \frac{u}{x} = -\frac{1}{x}\cos^2 u \\
\frac{u'}{\cos^2 u} &= -\frac{1}{x} \\
\tan u(x) &= -\ln x + C \\
y(x) &= x\arctan\left(C - \ln x\right).
\end{aligned}
$$