Matematika A3 házi feladatok

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 ősz

1. Vektoranalízis

1. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt és $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ vektort választva $\omega = c|\mathbf{k}|$ esetén az $u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$ függvény (időtől függő vektormező) kielégíti a hullámegyenletet, azaz
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \triangle u$$
ahol a $\triangle$ Laplace-operátor az $\mathbf{r} = (x, y, z)$ térkoordináták szerinti parciális deriváltakból a szokásos módon épül fel.
2. Tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} f(x, y, z) = (2xy + 3z^2)\mathbf{i} + (x^2 - 4yz)\mathbf{j} + (-2y^2 + 6xz)\mathbf{k}$. Határozza meg $f \circ O$ gradiensét, ha O a z tengely körüli $\pi/2$ szögű forgatás.
3. Bizonyítsa be a $\operatorname{grad}(f \circ g) = (f' \circ g) \operatorname{grad} g$ láncszabályt, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
4. Van-e potenciálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (2xy + 4xz)\mathbf{i} + (x^2 - z^2)\mathbf{j} + (2x^2 - 2yz)\mathbf{k}$ vektormezőnek? Ha igen, határozzon meg egyet.
5. Mutassa meg, hogy minden konstans vektormező vektorpotenciálos, és határozza meg egy vektorpotenciálját.
6. Adja meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 13^2$ és $(x - 7)^2 + y^2 + z^2 = 8^2$ felületek metszésvonalának egy paraméterezését.
7. Adja meg az $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ ellipszoid $z \geq \sqrt{2}$ darabjának egy paraméterezését a paramétertartománnyal együtt.
8. Legyen a $z = 0$ sík a Föld felszíne. Az origóból $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ kezdősebességgel elhajítunk egy testet, így annak pályája
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}}{2} t^2$$
ahol $\mathbf{g} = -9{,}81\mathbf{k}$. Mekkora utat tesz meg a test a földetérésig?
9. Hol van az $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\,\mathbf{i} + e^t \sin t\,\mathbf{j}$ paraméteres egyenletű vékony homogén drótból készült csigavonal $t \in [0, 2\pi]$ darabjának (vagyis egy körülfordulásának) a tömegközéppontja?
10. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = 2xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + 3z^3\mathbf{k}$ vektormezőt az $ABCD$ négyzeten ebben a sorrendben körüljárva, ha $A = (0, 0, 0)$, $B = (a, 0, 0)$, $C = (a, a, 0)$, $D = (0, a, 0)$.
11. Mennyi az
$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{1}{y + z}\mathbf{i} - \frac{x}{(y + z)^2}\mathbf{j} - \frac{x}{(y + z)^2}\mathbf{k}$$
vektormező integrálja az
$$\mathbf{r}(t) = \Big(2t + (1 - t)\cos^2 t\Big)\,\mathbf{i} + e^{-t}(t^2 - 1)\mathbf{j} + \frac{2}{1 + t^2}\mathbf{k}$$
görbe $t_1 = 0$-tól $t_2 = 1$-ig terjedő darabján?
12. Számítsa ki annak az állandó μ felületi tömegsűrűségű lemeznek a tömegét, amelyet a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúpfelületből metsz ki az $x^2 + y^2 = 2x$ egyenletű henger.
13. Határozza meg az origó középpontú, m tömegű, igen vékony gömbhéj alakú, homogén test tehetetlenségi nyomatékát a z tengelyre nézve, ha a sugara R, vagyis az
$$f(x, y, z) = \frac{m}{4\pi R^2}(x^2 + y^2)$$
függvény felszíni integrálját a $(0, 0, 0)$ középpontú R sugarú gömb felszínén.

14. Egy R sugarú kör keresztmetszetű csőben víz folyik. Ha a cső tengelyét választjuk z tengelynek, akkor a víz áramlási sebességét az (x, y, z) pontban a $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \alpha(R^2 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$$

vektor-vektor függvény értéke adja meg (m/s egységben) a csövön belül. Hány m^3 víz áramlik át a $z = 0$ síkon 1s alatt?

15. A $[0, 1]^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ egységkockát inhomogén anyag tölti ki, melynek sűrűsége a $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\varrho(x, y, z) = 1 + x + 2y + 3z$$

függvény szerint alakul. Mekkora a kocka tömege és hol van a tömegközéppontja?

16. Egy vékony homogén lemez a $2^2 \le x^2 + y^2 \le (2 + \epsilon)^2$, $|z| \le 2$, $0 \le y \le x$ egyenlőtlenségek által meghatározott térrészt tölti ki. Határozza meg a lemez tömegközéppontját. Mi történik, ha $\epsilon \to 0$? Határozza meg a limeszt közvetlenül is, felszíni integrál segítségével.

17. Gauss-tétel segítségével számítsa ki a $\mathbf{v}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ egyenletű felületen befelé mutató irányítás mellett.

18. Számítsa ki az $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

vektormező integrálját

   a) az $(5, 0, 0)$ középpontú 1 sugarú gömbfelületen kifelé mutató irányítás mellett
   b) az origó középpontú 1 sugarú gömbfelületen kifelé mutató irányítás mellett

19. A Stokes-tétel segítségével határozza meg a $\mathbf{v}(x, y, z) = -x^2y\mathbf{i} + z^3\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 = 16$ hengerfelület és az $x + z = 0$ sík metszésvonalán a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív forgásiránnyal.

20. A Green-tétel segítségével számítsa ki a $\mathbf{v}(x, y) = (x - y)^3\mathbf{i} + (-x^3 + 3x^2y)\mathbf{j}$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 = 1$ körvonalon pozitív körüljárás szerint.