Matematika A3 első PPZH — A csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok — 2016. december 13.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

1. (3×2p) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.

   a) Az $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ függvény Lipschitz-folytonos a $[0,1]$ intervallumon.
   b) Ha egy vektormező vektorpotenciálos, akkor bármely zárt görbén 0 az integrálja.
   c) Vektormező görbe menti integráljánál a görbe megfordításakor az integrál nem változik.

   Megoldás.

   a) Hamis. A függvény folytonosan differenciálható $(0,1)$-en, és 0-ban a derivált abszolútértéke végtelenhez tart. Emiatt $\frac{|\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(0)|}{t-0}$ tetszőlegesen nagy lehet (Lagrange-féle középérték-tétel miatt).
   b) Hamis. Vektorpoteciálos vektormezőknek zárt felületen 0 az integrálja. Akkor lenne igaz a következtetés, ha skalárpotenciál létezését tennénk fel.
   c) Hamis. A görbe megfordításánál az integrálközelítő összegek minden tagja ellentettjére változik, hiszen a skalárszorzat egyik tényezője megfordul. Emiatt a limesz, vagyis a görbementi integrál is az ellentettjére változik.

2. (4p) Bizonyítsa be, hogy ha $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ Lipschitz-folytonos, akkor az általa meghatározott görbe rektifikálható.

   Megoldás. Legyen L Lipschitz-konstans, azaz minden $t_1, t_2 \in [0,1]$ esetén $|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|$. Ekkor tetszőleges $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n = 1$ osztópontokat választva a közelítő töröttvonal hossza felülről becsülhető az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^{n} L|t_i - t_{i-1}| \\ &= L\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = L(t_n - t_0) = L,\end{aligned}$$

   tehát létezik az osztópontoktól (és azok számától) független felső korlát. Ez éppen azt jelenti, hogy a szuprémum véges, vagyis a görbe rektifikálható.

3. (8p) Létezik-e skalárpotenciálja az

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} + \frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}$$

   vektormezőnek? Ha igen, határozzon meg egyet.

   Megoldás. $\mathbf{u}$ mindenhol folytonosan differenciálható, tehát a potenciál létezésének feltétele az, hogy a rotáció 0 legyen. A szimmetria miatt elég például az első komponens y szerinti deriváltját számolni:

$$\frac{\partial \frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2}}{\partial y} = -\frac{4xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^2},$$

   a többi deriváltat a változók cseréjével határozhatjuk meg. x és y felcserélésekor ez nem változik, tehát a rotáció z komponense 0. Hasonlóan látható, hogy a többi komponens is 0, tehát létezik potenciál.

A tanult formula alapján

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^z \frac{2\zeta}{1+x^2+y^2+\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta + \int_0^y \frac{2\eta}{1+x^2+\eta^2}\,\mathrm{d}\eta + \int_0^x \frac{2\xi}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \ln(1+x^2+y^2+z^2) - \ln(1+x^2+y^2) + \ln(1+x^2+y^2) \\
&\quad - \ln(1+x^2) + \ln(1+x^2) - 1 \\
&= \ln(1+x^2+y^2+z^2) - 1
\end{aligned}$$

egy potenciálfüggvény.

4. (8p) Határozza meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = (x^2+yz)\mathbf{i} + (2x^2-y^2)\mathbf{j} + (-x^2+z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az AB szakasz mentén, ha $A=(1,1,0)$, $B=(5,7,-4)$.

   Megoldás. A szakasz egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) = (1+4t)\mathbf{i} + (1+6t)\mathbf{j} + (-4t)\mathbf{k}$, ahol $t\in[0,1]$. Az integrált

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}(t) &= 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \\
\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) &= (1+4t-8t^2)\mathbf{i} + (1+4t-4t^2)\mathbf{j} + (-1-8t)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

   felhasználásával számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 ((1+4t-8t^2)\mathbf{i} + (1+4t-4t^2)\mathbf{j} + (-1-8t)\mathbf{k})\cdot(4\mathbf{i}+6\mathbf{j}-4\mathbf{k})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (14+72t-56t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= 14 + \frac{72}{2} - \frac{56}{3} = \frac{94}{3}.
\end{aligned}$$

5. (8p) Mennyi az $\mathbf{r}(t) = 2\ln t\,\mathbf{i} + 2\sqrt{2}t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ térgörbe $t\in[1,2]$ darabjának ívhossza?

   Megoldás.

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \left|2\frac{1}{t}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}\right| = \sqrt{\frac{4}{t^2}+8+4t^2} = 2\frac{1+t^2}{t}$$

   felhasználásával

$$I = \int_1^2 |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t = 2\int_1^2 \left(\frac{1}{t}+t\right)\mathrm{d}t = \Big[2\ln t + t^2\Big]_1^2 = 3 + 2\ln 2.$$

6. (8p) Hol van a tömegközéppontja az $x^2+y^2+z^2=1$ gömbfelület $0\le y\le x$ egyenlőtlenség által meghatározott darabjának?

   Megoldás. Használjuk a gömbfelület szokásos paraméterezését: $\mathbf{r}(\vartheta,\varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}$, a megadott darabnak megfelelő paramétertartomány $\vartheta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,\pi/4]$. A tömegközéppont meghatározásához a koordinátafüggvények felszíni integrálját kell elosztani a felszínnel. Felhasználva, hogy

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right| = \sin\vartheta,$$

a megfelelő integrálok:

$$\int x\,\mathrm{d}S = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} \sin^2\vartheta\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = (\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$
$$\int y\,\mathrm{d}S = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} \sin^2\vartheta\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = (-\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(2-\sqrt{2})$$
$$\int z\,\mathrm{d}S = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} \cos\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = 0$$
$$\int 1\,\mathrm{d}S = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Ebből a tömegközéppont helye:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}.$$

7. (8p) Számítsa ki az

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (-x^4y^3 - x^6y)\mathbf{i} + (xy^6 + x^3y^4)\mathbf{j}$$

vektormező integrálját az $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ egyenletrendszerű görbén pozitív körüljárás szerint (a z tengely pozitív fele felől nézve).

Megoldás. A megadott görbe körvonal, tehát zárt, így használható a Stokes-tétel. Mivel a görbe a $z = 0$ síkban fekszik, egy ugyanebben a síkban fekvő T körlap pereme. Ha ezen a körlapon integrálunk egy vektormezőt, akkor elég annak z komponensét ismerni (vagyis igazából a Stokes-tétel speciális esetét, a Green-tételt használjuk). $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ z komponense:

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\mathbf{u})_z(x, y, z) &= \frac{\partial(xy^6 + x^3y^4)}{\partial x} - \frac{\partial(-x^4y^3 - x^6y)}{\partial y}\\ &= y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6 = (x^2 + y^2)^3.\end{aligned}$$

Az integrálásnál polárkoordinátákat érdemes használni:

$$\begin{aligned}\int_{\partial T} \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_T \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}\\ &= \int_{x^2+y^2\le R^2} (x^2 + y^2)^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R r^6 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\pi\left[\frac{r^8}{8}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}R^8.\end{aligned}$$