Matematika A3 második PPZH — B csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok — 2016. december 13.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

1. (3×2p) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.
   a) Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-problémának bármely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén egyértelmű a lokális megoldása.
   b) Az $y'' + e^x y' - (\sin x)y = 1$ differenciálegyenlet megoldásai kétdimenziós vektorteret alkotnak (a pontonkénti műveletekre nézve).
   c) Ha az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ függvények az $y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = 0$ differenciálegyenlet megoldásai, ahol a_0, a_1 folytonos, és Wronski-determinánsuk valamilyen x pontban nem 0, akkor sehol sem 0.

   Megoldás.
   a) Igaz. A folytonos differenciálhatóságból következik a lokális Lipschitz-folytonosság (a két változóban együtt is), tehát a Picard-Lindelöf-tétel szerint ilyenkor bármilyen kezdeti feltétel mellett egyértelmű a lokális megoldás.
   b) Hamis. Az egyenlet inhomogén lineáris, tehát a megoldások egy altér eltoltját alkotják. Úgy is lehet érvelni, hogy a 0 függvény nem oldja meg az egyenletet, tehát emiatt sem lehet altér a megoldáshalmaz.
   c) Igaz. A két megoldás Wronski-determinánsa kielégíti a $W' = -a_1(x)W$ differenciálegyenletet, aminek $W(x) = Ce^{\int a_1(x)\,\mathrm{d}x}$ a megoldása, ha ez valahol nem 0, akkor C sem 0, viszont a másik tényező sehol nem 0.

2. (4p) Tegyük fel, hogy $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldja az $y' = f(y)$ differenciálegyenletet, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\lim_{x\to\infty} y(x) = A \in \mathbb{R}$. Bizonyítsa be, hogy ekkor $\lim_{x\to\infty} y'(x) = 0$.

   Megoldás. Mivel f folytonos,
   $$\lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} f(y(x)) = f\left(\lim_{x\to\infty} y(x)\right) = f(A)$$
   a feltétel szerint. Ha ez a határérték nem 0, akkor $\exists\epsilon > 0$ és K küszöb, amivel minden $x > K$ esetén $y'(x) > \epsilon$ vagy minden $x > K$ esetén $y'(x) < -\epsilon$. Ebből a két esetben $y(x) > y(K) + \epsilon(x - K)$ illetve $y(x) < y(K) - \epsilon(x - K)$ következik a Lagrange-középértéktételből, ami ellentmond annak, hogy $y(x)$-nek létezik határértéke. Tehát csak $f(A) = 0$ lehetséges.

3. (8p) Határozza meg az $y' = \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának szukcesszív approximációjával kapott n. közelítő függvényt. Mi a függvénysorozat limesze?

   Megoldás. A függvénysorozat 0. tagja $\varphi_0(x) = 1$, a továbbiakat a
   $$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\varphi_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
   rekurzió határozza meg. Az első néhány függvény
   $$\begin{aligned}
   \varphi_0(x) &= 1\\
   \varphi_1(x) &= 1 + \operatorname{arsinh} x\\
   \varphi_2(x) &= 1 + \operatorname{arsinh} x + \frac{\operatorname{arsinh}^2 x}{2}\\
   \varphi_3(x) &= 1 + \operatorname{arsinh} x + \frac{\operatorname{arsinh}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{arsinh}^3 x}{6}\\
   \varphi_4(x) &= 1 + \operatorname{arsinh} x + \frac{\operatorname{arsinh}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{arsinh}^3 x}{6} + \frac{\operatorname{arsinh}^4 x}{24},
   \end{aligned}$$

ebből sejthetjük, hogy

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\operatorname{arsinh}^i x}{i!}.$$

Valóban:

$$\begin{aligned}
1 + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \sum_{i=0}^{k} \frac{\operatorname{arsinh}^i x}{i!} \,\mathrm{d}\xi &= 1 + \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \operatorname{arsinh}^i \xi \,\mathrm{d}\xi \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \frac{\operatorname{arsinh}^{i+1} x}{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{\operatorname{arsinh}^i x}{i!} = \varphi_{k+1}(x).
\end{aligned}$$

A függvénysorozat mindenhol abszolút konvergens, határértéke

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\operatorname{arsinh}^i x}{i!} = e^{\operatorname{arsinh} x} = x + \sqrt{1+x^2}.$$

4. (8p) Oldja meg a $2xy'' = y' \ln y'$ differenciálegyenletet $y(1) = 0$, $y'(1) = e^2$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenletben nem szerepel y, tehát $v = y'$-re nézve eggyel kisebb rendű differenciálegyenlet: $2xv' = v \ln v$, ami szétválasztható.

$$\frac{v'}{v \ln v} = \frac{1}{2} \frac{1}{x}$$

   Integráljuk mindkét oldalt 1-től x-ig (a változót előzetesen pl. ξ-re cserélve):

$$\ln \ln v(x) - \ln \ln e^2 = \frac{1}{2} \ln x,$$

   tehát $v(x) = e^{2\sqrt{x}}$. Ebből integrálással kapjuk az eredeti egyenlet megoldását. $t^2 = \xi$, $2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\xi$ helyettesítést alkalmazva

$$\begin{aligned}
y(x) &= y(1) + \int_1^x v(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_1^x e^{2\sqrt{\xi}}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_1^{\sqrt{x}} e^{2t} 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \left[te^{2t}\right]_1^{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} e^{2t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{x}e^{2\sqrt{x}} - e^2 - \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2} + \frac{e^2}{2} \\
&= \sqrt{x}e^{2\sqrt{x}} - \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2} - \frac{e^2}{2}.
\end{aligned}$$

5. (8p) Határozza meg a $(2xe^y - \sin x) + (2(1+x^2)e^y + \cos x)y' = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = -\ln 2$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

Megoldás. Az egyenlet $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ alakú, ahol $P(x,y)=2xe^y-\sin x$ és $Q(x,y)=2(1+x^2)e^y+\cos x$. Nem egzakt, viszont létezik csak y-tól függő multiplikátor:

$$\ln|M(y)|=\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}\,\mathrm{d}y=\int\frac{(4xe^y-\sin x)-2xe^y}{2xe^y-\sin x}\,\mathrm{d}y=\int\mathrm{d}y=y,$$

tehát $M(y)=e^y$. Eszerint a $(2xe^{2y}-e^y\sin x)+(2(1+x^2)e^{2y}+e^y\cos x)y'=0$ egyenlet már egzakt. Egy potenciál

$$u(x,y)=\int_0^x(2\xi-\sin\xi)\,\mathrm{d}\xi+\int_0^y(2(1+x^2)e^{2\eta}+e^\eta\cos x)=e^{y(x)}\cos x+(1+x^2)e^{2y(x)}-2.$$

Az általános megoldás implicit alakban $u(x,y(x))=C$, ahol C paraméter. A kezdeti feltétel alapján $C=-\frac{5}{4}$, azaz

$$e^{y(x)}\cos x+(1+x^2)e^{2y(x)}=\frac{3}{4}.$$

6. (8p) Az

$$\begin{aligned}y_1'&=(\sin x)y_1+y_1^2y_2\\ y_2'&=\frac{y_2}{1+y_1^2}\end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{y}(0)=(0,0)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása $\mathbf{y}(x)=(0,0)$. Határozza meg a megoldás kezdeti feltétel szerinti deriváltját.

Megoldás. A deriváltmátrix kielégíti a $D'=A(x)D$ differenciálegyenletet és a $D(0)=I$ kezdeti feltételt, ahol $A(x)$ az egyenletek jobb oldalainak y_1 illetve y_2 szerinti deriváltjait tartalmazza a megadott megoldás mentén:

$$A(x)=\begin{bmatrix}\sin x+2y_1y_2 & y_1^2\\ -\frac{2y_1y_2}{(1+y_1^2)^2} & \frac{1}{1+y_1^2}\end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{y_1=0\\ y_2=0}}=\begin{bmatrix}\sin x & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$D(x)$ oszlopai ugyanannak a lineáris egyenletrendszernek megoldásai, de különböző kezdeti feltétellel, tehát érdemes az általános megoldást megkeresni. Az egyenletrendszer

$$\begin{aligned}D_{1i}'&=(\sin x)D_{1i}\\ D_{2i}'&=D_{2i},\end{aligned}$$

ami valójában két független egyenlet, az általános megoldás $(D_{1i}(x),D_{2i}(x))=(C_1e^{-\cos x},C_2e^x)$. A kezdeti feltétel alapján az $i=1$ komponenseknél $C_1=e$, $C_2=0$, míg az $i=2$ komponenseknél $C_1=0$, $C_2=1$. Behelyettesítve kapjuk a deriváltmátrixot:

$$D(x)=\begin{bmatrix}D_{11}(x) & D_{12}(x)\\ D_{21}(x) & D_{22}(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{1-\cos x} & 0\\ 0 & e^x\end{bmatrix}.$$

7. (8p) Határozza meg az $y'+\frac{1}{x}y=-e^x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén elsőrendű lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\ln y(x)=\int\frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\ln x+C,$$

vagyis $y(x) = C\frac{1}{x}$. Az inhomogén egyenletet az állandók variálásának módszerével lehet megoldani, a megoldás $y(x) = \frac{c(x)}{x}$, ahol $c'(x) = -xe^x$, tehát

$$c(x) = \int (-xe^x)\,\mathrm{d}x = -xe^x + \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x - xe^x + C.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{c(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - e^x + \frac{C}{x}.$$