Matematika A3 szigorlat – 2014. június 10.

Elmélet ($6 \times 4 + 2 \times 3 = 30$ pont)

1. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
2. Mikor nevezünk egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt konvexnek?
3. Mit nevezünk mértani sornak, mikor konvergens és mi az összege?
4. Írja fel a sík origó körüli α szögű forgatásának a mátrixát a szokásos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban.
5. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.
6. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ térgörbe ívhosszát?
7. Mondja ki a Stokes-tételt.
8. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi numerikus sorozatok határértékét. ($5 + 5$ pont)

$$a_n = \frac{5^{-n}n^2 + 3n - \sqrt{n}}{\sin(n^2) + n}$$
$$b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$$

2. Végezze el az $f(x) = x + \sin x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n - 1)2^n x^n$$

hatványsor konvergenciasugarát és összegfüggvényét.

4. A c paraméter mely értékénél nincs megoldása a

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 5x_3 &= -8 \\ 4x_2 - 4x_3 &= 8 \\ -3x_1 + 4x_2 + cx_3 &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszernek? Mi a megoldás, ha $c = 1$?

5. Egy homogén tömegeloszlású test alakja kúp, melynek R sugarú alapköre az x-y síkban fekszik, középpontja az origó. A kúp csúcsa a $(0, 0, h)$ pontban van. A testet az $y = 0$ síkkal kettévágjuk és az $y < 0$ felét elhagyjuk. Hol van a megmaradó rész tömegközéppontja?
6. Határozza meg a $(1 + x^2)yy' = x(1 + y^2)$ differenciálegyenlet általános megoldását.
7. Oldja meg az $y'' + 5y' + 4y = 12$ differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.