**Matematika A3 szigorlat** – 2016. május 24.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja a valós számsorozat fogalmát, és adjon példát szigorúan monoton csökkenő korlátos számsorozatra.
2. Mondja ki a Bolzano-tételt.
3. Mit jelent az, hogy az $f$ függvénynek az $x_0$ pontban a baloldali határértéke $-\infty$?
4. Ismertesse az egyenletes konvergencia Weierstrass-féle elégséges feltételét.
5. Definiálja egy lineáris transzformáció sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.
6. Írja fel az $f(x, y)$ kétváltozós függvény $(x_0, y_0)$ pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.
7. Számolással igazolja, hogy bármely skalármező gradiensének rotációja 0.
8. Mondja ki a Gauss-Osztrogradszkij-tételt.
9. Mit nevezünk kezdetiérték-problémának?
10. Ismertesse a szukcesszív approximáció módszerét.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n^2 + n - \sin n^2} - \sqrt{n^2 - 3n + \tanh n}$$

$$b_n = \left(\frac{2n+3}{2n-5}\right)^{\operatorname{ctg} \frac{1}{n}}$$

2. Határozza meg az alábbi integrál értékét.

$$\int_0^1 \frac{\log^2 x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

3. Adja meg az $f(x) = x^3 \arctan x$ függvény 0 körüli Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát.
4. Határozza meg az $a$ paraméter függvényében az

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4+a & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -a \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix rangját.

5. Határozza meg a $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány tömegközéppontját.
6. Oldja meg az $y'' - 4y + 2 = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltétellel.
7. Számítsa ki az $f(x) = \{x\}$ (törtrész) függvény Laplace-transzformáltját.