Matematika A3 szigorlat – 2016. május 31.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a+bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a<0$, $b \in \mathbb{R}$.
2. Mit jelent az, hogy egy valós számsorozat határértéke az A szám?
3. Adjon elégséges feltételt egy kétszer folytonosan differenciálható függvény konvexitására.
4. Ismertesse a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot.
5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
6. Mondja ki a folytonos kétváltozós függvények téglalap alakú tartományon (vagy normáltartományon) való integrálásáról szóló tételt.
7. Definiálja a vektormező fogalmát.
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Definiálja az $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvények Laplace-transzformáltját.
10. Mondja ki a Cauchy-Peano-féle egzisztenciatételt.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi integrált.
$$\int \frac{1-2x^2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,\mathrm{d}x$$
2. Végezze el az $f(x) = (2+3x+2x^2)e^x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg az
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ x & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}$$
függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát. Mennyi a sor összegének $x=\pi$ helyen felvett értéke?
4. Határozza meg a
$$\begin{bmatrix} -3 & -10 & -12 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$
mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis?
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = xz\mathbf{i} + (1-z^2)\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2+y^2=4$, $0 \le z \le 1$ hengerpaláston kifelé mutató irányítás mellett.
6. Határozza meg az $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány tömegközéppontját.
7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.