Matematika A3 szigorlat – 2016. június 7.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Milyen $q \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az $a_n = aq^n$ mértani sorozat? Mi a határértéke?

   Megoldás. A konvergencia feltétele $-1 < q \leq 1$. Ha $|q| < 1$, akkor a határérték 0, ha $q = 1$, akkor pedig a.

2. Definiálja egy f függvény x_0 pontbeli deriváltját.

   Megoldás. $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ vagy $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$

3. Definiálja a Riemann-integrál fogalmát.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Az $a = x_0 \leq t_0 \leq x_1 \leq t_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq t_{x-1} \leq x_n = b$ osztópontokhoz tartozó integrálközelítő összeg $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$. Azt mondjuk, hogy f az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható és integrálja I, ha $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$, amivel az osztópontok bármely olyan válaszása esetén, ahol $\max_{i \in \{0,\ldots,n-1\}}(x_{i+1} - x_i) < \delta$ teljesül, az $\left| I - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \right| < \epsilon$ egyenlőtlenség fennáll.

4. Mit jelent az, hogy az $f(x, y)$ függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban?

   Megoldás. Léteznek olyan A_x, A_y számok, amellyel $f(x, y) = f(x_0, y_0) + A_x(x - x_0) + A_y(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$

5. Ismertesse a Gauss-elimináció módszerét és egy alkalmazását.

   Megoldás. A Gauss-elimináció során egy mátrix lépcsős alakját határozzuk meg sorműveletek segítségével. A sorműveletek: két sor cseréje, egy sor többszörösének hozzáadása egy másik sorhoz, egy sor 0-tól különböző számmal szorzása. A Gauss-elimináció menete: Ha az első oszlopban csupa 0 elem van, akkor az első oszlop letakarásával keletkező kisebb mátrixon dolgozunk tovább. Ha van 0-tól különböző elem, akkor esetleg sorcserékkel elérjük, hogy az az első sorban legyen, majd az első sor megfelelő többszöröseit a többihez adva elérjük, hogy az első oszlop többi eleme 0 legyen. Ezután az első sor és oszlop letakarásával kapott kisebb mátrixon folytatjuk, stb. Alkalmazások: pl. lineáris egyenletrendszer megoldása, rang meghatározása.

6. Mit értünk egy hatványsor konvergenciasugara alatt? Adjon példát olyan hatványsorra, amelynek a konvergenciasugara 1 és az $x = 2$ és $x = 4$ pontokban is konvergens.

   Megoldás. Egy x_0 középpontú hatványsor konvergenciasugara R, ha $|x - x_0| < R$ esetén konvergens, $|x - x_0| > R$ esetén divergens. A feltétel szerinti hatványsornak csak $x_0 = 3$ lehet a középpontja, és ilyen létezik is, pl. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x - 3)^n$

7. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.

   Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett irányított felület, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor $\mathbf{u}$ felületi integrálja a felületen $\iint_D \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} \mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v))\, du\, dv$ módon számítható, ha $\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$ iránya a felület irányításának megfelelő, és ennek a -1-szerese, ha azzal ellentétes.

8. Adjon példát olyan síkbeli vektormezőre, amelynek rotációja az egész értelmezési tartományon 0, de nincsen potenciálfüggvénye.

   Megoldás. pl. $\mathbf{u}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$

9. Mondja ki a Picard-Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ és $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos, a másodiktól az utolsóig minden változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ esetén létezik az $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

    Megoldás. Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete az $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ egyenlet. Ha ennek gyökei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, multiplicitásuk rendre $m_1, \ldots, m_r$, akkor a differenciálegyenlet megoldásterének egy bázisa $e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_r x}, \ldots, x^{m_r - 1} e^{\lambda_r x}$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \ln n - \sqrt{\ln^2 n + \ln n + \sin n} \qquad\qquad b_n = \frac{n^3 - n^{2\arctan n}}{7n + \frac{9^n}{n!} + (2n)^{-n}}$$

Megoldás.

$$a_n = \frac{\ln^2 n - (\ln^2 n + \ln n + \sin n)}{\ln n + \sqrt{\ln^2 n + \ln n + \sin n}} = \frac{-1 - \frac{\sin n}{\ln n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\ln n} + \frac{\sin n}{\ln^2 n}}} \to -\frac{1}{2}$$

mivel sin korlátos, $\ln n \to \infty$

$$b_n = \frac{n^{2\arctan n}}{n} \frac{n^{3-2\arctan n} - 1}{7 + \frac{9^n}{n \cdot n!} + \frac{1}{n}(2n)^{-n}} \to -\infty$$

mivel $2\arctan n \to \pi > 3{,}1$, és így elég nagy n esetén $n^{3-2\arctan n} < n^{-0{,}1} \to 0$.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{3x^2 + 30}{x^3 - 2x^2 + 10x} \,\mathrm{d}x$$

Megoldás. A nevező $x(x^2 - 2x + 10)$, a második tényező gyökei $1 \pm 3i$, tehát $\mathbb{R}$ felett irreducibilis. Parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{3x^2 + 30}{x^3 - 2x^2 + 10x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 10} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A + C)x + 10A}{x(x^2 - 2x + 10)}$$

alapján az egyenletrendszer

$$\begin{aligned} 3 &= A + B & A &= 3 \\ 0 &= -2A + C \rightsquigarrow & B &= 0 \\ 30 &= 10A & C &= 6 \end{aligned}$$

Eszerint

$$\int \frac{3x^2 + 30}{x^3 - 2x^2 + 10x} \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{6}{(x-1)^2 + 9} \right) \mathrm{d}x = 3\ln x + \frac{2}{3} \int \frac{1}{(\frac{x-1}{3})^2 + 1} \,\mathrm{d}x = 3\ln x + 2\arctan\frac{x-1}{3} + C$$

3. Határozza meg az $f(x) = \ln(2 + x^2)$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát.

Megoldás. Felhasználva, hogy

$$(\ln(2 + x^2))' = \frac{2x}{2 + x^2} = x\frac{1}{1 + \frac{x^2}{2}} = x\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^k}$$

és $f(0) = \ln 2$, tagonkénti integrálással adódik, hogy

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)2^k}$$

A konvergenciasugár ugyanaz, mint a deriváltté, ami racionális törtfüggvény, tehát a legközelebbi szingularitás távolsága x_0-tól, vagyis $\sqrt{2}$. Kevésbé általános megfontolással arra is hivatkozhatunk, hogy felhasznált mértani sor pontosan akkor konvergens, ha $|x^2/2| < 1$. Vagy a végső formulából gyökkritériummal is kijön.

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = -x^2 + 6xy - 7y^2 - y^4$ függvény lokális szélsőértékei?

Megoldás. A parciális deriváltak

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= -2x + 6y \\ f'_y(x, y) &= 6x - 14y - 4y^3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -14 - 12y^2 \end{bmatrix}$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ miatt lokális szélsőérték ott lehet, ahol az első deriváltaknak zérushelye van, az elsőből $x = 3y$ következik, ezt a másodikba írva $0 = 4y - 4y^3 = 4y(1 - y^2)$, ennek zérushelyei $y = 0$ és $y = \pm 1$. A második derivált mátrix a $(0, 0)$ pontban indefinit (tehát itt nincs szélsőérték), a $(3, \pm 1)$ pontokban pedig negatív definit, tehát itt vannak lokális maximumok.

5. Van-e az

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \frac{z}{y+xz}\mathbf{i} - \frac{xz}{y^2+xyz}\mathbf{j} + \frac{x}{y+xz}\mathbf{k}$$

vektormezőnek potenciálja az $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ tartományon? Számítsa ki $\mathbf{u}$ integrálját az $\mathbf{r}(t) = (4+\cos t)\mathbf{i} + (9-\sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ körív mentén a 0 és $\pi/2$ paraméterértékek között.

Megoldás. A megadott tartomány konvex, ott $\mathbf{u}$ folytonosan differenciálható, így a feltétel az, hogy a rotációja 0 legyen. Ez teljesül, tehát létezik potenciál. Potenciált úgy lehet egyszerűen keresni, hogy az első komponenst x szerint, a másodikat y szerint, a harmadikat z szerint integráljuk, az eredmény $\ln(y+xz)+C_1(y,z)$, $-\ln y + \ln(y+xz) + C_2(x,z)$ és $\ln(y+xz)+C_3(x,y)$. Látszik, hogy $C_1(y,z) = -\ln y$, $C_2(x,z) = 0$ és $C_3(x,y) = -\ln y$ választható, tehát $-\ln y + \ln(y+xz)$ potenciál.
A Newton-Leibniz formula alapján a vonalintegrál kiszámításához a végpontokat kell csak behelyettesíteni: $\mathbf{r}(0) = 5\mathbf{i}+9\mathbf{j}+\mathbf{k}$ és $\mathbf{r}(\pi/2) = 4\mathbf{i}+8\mathbf{j}+\mathbf{k}$, ebből az integrál

$$(-\ln 8 + \ln(8+4)) - (-\ln 9 + \ln(9+5)) = \ln\frac{27}{28}$$

6. Határozza meg az $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. A homogén egyenlet $y''-4y'+4y=0$, karakterisztikus polinomja $\lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2$, tehát belső rezonancia van: a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{2x}+Bxe^{2x}$.
Az inhomogén tag exponenciális ugyanilyen kitevővel, tehát külső rezonancia is van, az inhomogén egyenlet egy megoldását $y(x) = Ax^2e^{2x}$ alakban keressük. Behelyettesítve

$$e^{2x} = y''-4y'+4y = A(4x^2e^{2x}+8xe^{2x}+2e^{2x}-4(2x^2e^{2x}+2xe^{2x})+4x^2e^{2x}) = 2Ae^{2x}$$

tehát $A = \frac{1}{2}$.
Az általános megoldás $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x} + Ae^{2x} + Bxe^{2x}$.

7. Laplace-transzformáció segítségével oldja meg az $y''+y'-20y = 38x^{18}+2x^{19}-2x^{20}$ differenciálegyenletet $y(0)=0$, $y'(0)=9$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Legyen $Y = \mathcal{L}y$, ekkor

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}y')(z) &= zY(z)\\ (\mathcal{L}y'')(z) &= z^2Y(z) - 9\end{aligned}$$

Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformálva

$$z^2Y(z) - 9 + zY(z) - 20Y(z) = 38\frac{18!}{z^{19}} + 2\frac{19!}{z^{20}} - 2\frac{20!}{z^{21}} = \frac{20!}{10z^{21}}(z^2+z-20)$$

tehát

$$Y(z) = \frac{20!}{z^{21}} + \frac{9}{z^2+z-20} = \frac{1}{10}\frac{20!}{z^{21}} + \frac{1}{z-4} - \frac{1}{z+5}$$

Ezt visszatranszformálva a megoldás: $y(x) = \frac{1}{10}x^{20} + e^{4x} - e^{-5x}$.