Matematika A3 szigorlat – 2016. június 14.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét.

   Megoldás. A komplex számot felírjuk trigonometrikus alakban: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Ha $r \neq 0$, akkor pontosan n darab n. gyöke van, ezek $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2. Írja le logikai jelek segítségével, hogy mit jelent az, hogy egy számsorozat divergens. Adjon példát korlátos divergens számsorozatra.

   Megoldás. Az a_n sorozat divergens, ha $\forall A \in \mathbb{R} \exists \epsilon > 0 \forall N_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq N_0 : |A - a_n| \geq \epsilon$. Pl. $a_n = (-1)^n$.

3. Mondja ki az összetett függvény differenciálására vonatkozó tételt.

   Megoldás. Ha f és g függvények, $x_0 \in \mathbb{R}$, g differenciálható x_0-ban és f differenciálható $g(x_0)$-ban, akkor $f \circ g$ is differenciálható az x_0 pontban, és a deriváltja ott $f'(g(x_0))g'(x_0)$.

4. Ismertesse a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot.

   Megoldás. Az $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor konvergens, ha $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ és divergens, ha $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

5. Adjon szükséges és elégséges feltételt homogén lineáris egyenletrendszer megoldásának egyértelműségére az együtthatómátrix rangja segítségével.

   Megoldás. A megoldás akkor egyértelmű, ha az együtthatómátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával.

6. Adjon példát olyan kétváltozós függvényre, amelynek léteznek az origóban a parciális deriváltjai, de ott nem differenciálható

   Megoldás. pl. $\sqrt[3]{xy}$

7. Adjon példát olyan vektormezőre, amelynek a teljes értelmezési tartományán 0 a divergenciája, de nem áll elő egy vektormező rotációjaként.

   Megoldás. pl. $\mathbf{r} \mapsto \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^{3/2}}$

8. Mondja ki a Gauss-Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathrm{d}V$

9. Írja fel az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

   Megoldás. $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$

10. Ismertesse a Laplace-transzformáció alkalmazását differenciálegyenletek megoldására.

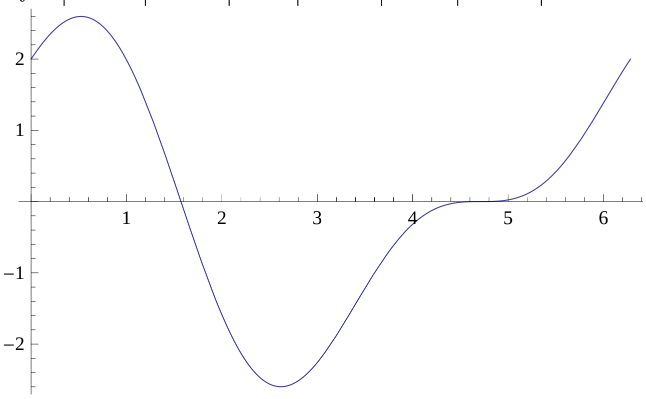
    Megoldás. A Laplace-transzformációt leginkább olyan lineáris differenciálegyenlet megoldására lehet alkalmazni, amelynek együtthatói állandók vagy esetleg (alacsony fokszámú) polinomok. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk, így az ismeretlen függvény Laplace-transzformáltjára nézve lineáris egyenlethez jutunk. Ha az együtthatók állandók voltak, akkor ez algebrai egyenlet, ha pedig polinomok, akkor differenciálegyenlet, amelynek rendje a polinomok fokszámának maximuma. Végül az eredeti egyenlet megoldását inverz Laplace-transzformációval határozhatjuk meg.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \sin 2x + 2\cos x$ függvény teljes függvényvizsgálatát. ($\arcsin \frac{1}{4} = 0{,}25268\ldots$)

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, mindenhol folytonos, 2π szerint periodikus, így $\pm\infty$-ben nem létezik határérték, sem aszimptota. $f(x) = 2\cos x(\sin x + 1)$ alapján a zérushelyek $\frac{\pi}{2} + \pi k$.
   $f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x = 2 - 4\sin^2 x - 2\sin x$, ez $\sin x$-ben másodfokú, a zérushelyek $\sin x = -1$ és $\sin x = \frac{1}{2}$, amiből $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ vagy $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ vagy $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.
   $f''(x) = -4\sin 2x - 2\cos x = -2\cos x(4\sin x + 1)$, ennek zérushelyei $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $-\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi k$ és $\pi + \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi k$.

	$\frac{\pi}{6}$	$(\ldots)$	$\frac{\pi}{2}$	$(\ldots)$	$\frac{5\pi}{6}$	$(\ldots)$	$\pi + \arcsin\frac{1}{4}$	$(\ldots)$	$\frac{3\pi}{2}$	$(\ldots)$	$2\pi - \arcsin\frac{1}{4}$	$(\ldots)$
f	max	╮	infl	╰	min	╯	infl	╭	infl	╯	infl	╭
f'	0	-	-	-	0	+	+	+	0	+	+	+
f''	-	-	0	+	+	+	0	-	0	+	0	-



$$R_f = [f(5\pi/6), f(\pi/6)] = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás.

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{-x^2}{2}(-2x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(\left[\frac{-x^2}{2}e^{-x^2}\right]_0^b - \int_0^b (-x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[\frac{-x^2}{2}e^{-x^2} - \frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^b\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[(x^2+1)e^{-x^2}\right]_0^b = \frac{1}{2}$$

3. Oldja meg az $A \cdot X = B$ egyenletet, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Megoldás. Pl. Gauss-eliminációval meghatározható A inverze, $X = A^{-1} \cdot B$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -7 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 0 \\ -7 & 17 & 5 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény feltételes szélsőértékeit a $4x^2 - 4xy + 4y^2 - 3 = 0$ feltétel mellett.

   Megoldás. Lagrange-multiplikátor módszerével:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - \lambda(4x^2 - 4xy + 4y^2 - 3)) = 2x - (8x - 4y)\lambda$$
$$0 = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - \lambda(4x^2 - 4xy + 4y^2 - 3)) = 2y - (-4x + 8y)\lambda$$

   Ebből λ kiküszöbölésével $x = \pm y$ adódik. Ha $x = y$, akkor a feltételből $3 = 4x^2$, azaz $x = y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, itt a függvényérték $\frac{3}{2}$. Ha viszont $y = -x$, akkor a feltételből $3 = 12x^2$, azaz $x = -y = \pm\frac{1}{2}$, itt a függvényérték $\frac{1}{2}$. Tehát $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ és $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ maximumhely, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ és $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ minimumhely.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = (2y+2z)\mathbf{i} + (-x-6y+4z)\mathbf{j} + (x-y-4z)\mathbf{k}$ vektormezőt az $(1,3,-9)$ középpontú, 3 egység sugarú gömb felületén befelé mutató irányítás mellett.

   Megoldás. Az integrál közvetlenül is számolható, de egyszerűbb a Gauss-Osztrogradszkij-tételt használni. $\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z) = 0 - 6 - 4 = -10$ alapján

$$\iint_{\text{gömbfelület befelé}} \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = -\iint_{\text{gömbfelület kifelé}} \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = -\iiint_{\text{golyó}} \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = -(-10)\cdot\frac{4\pi}{3}3^3 = 360\pi$$

6. Oldja meg a $(\cos x - y\sin x) + (2+2y+\cos x)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = -5$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\cos x - y\sin x) = -\sin x = \frac{\partial}{\partial x}$$

   miatt az egyenlet egzakt. Egy potenciál

$$u(x,y) = \int_0^x \cos\xi\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (2+2\eta+\cos x)\,\mathrm{d}\eta = \sin x + 2y + y^2 + y\cos x$$

   Az általános megoldás $u(x,y(x)) = C$, a kezdeti feltételből $C = u(0,-5) = 10$.

7. Sorfejtés segítségével határozza meg az $y'' + (x-2)y' - xy = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

   Megoldás. A megoldást $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alakban keressük, ekkor

$$\begin{aligned}
xy(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n\\
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n\\
xy'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n\\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n
\end{aligned}$$

   Ezeket az egyenletbe helyettesítve

$$0 = 2a_2 - 2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n - 2(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}\big)x^n$$

   adódik, tehát $a_2 = a_1$ és $n \geq 1$ esetén

$$a_{n+2} = -\frac{na_n - 2(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

   Ebből a kezdeti feltétel felhasználásával $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{6}$, stb. adódik, sejthetjük, hogy $n \geq 1$ esetén $a_n = \frac{1}{(n-1)!}$. Ezt a rekurzív összefüggésbe beírva

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= -\frac{na_n - 2(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} = -\frac{n\frac{1}{(n-1)!} - 2(n+1)\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-2)!}}{(n+2)(n+1)}\\
&= -\frac{1}{n!}\frac{n^2 - 2(n+1) - n(n-1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

   tehát tényleg ez a_n, így a keresett megoldás $y(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = xe^x$.