Matematika A3 szigorlat – 2016. június 21.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Adja meg a vektoriális szorzat geometriai definícióját és koordinátákkal adott vektorok vektoriális szorzatának kiszámítási módját.

   Megoldás. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektor, amelynek hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\gamma$, ahol γ a két vektor által bezárt szög, merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra, és $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot. Ha $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_z)$.

2. Mikor mondjuk, hogy az f függvénynek x_0 inflexiós pontja?

   Megoldás. x_0 inflexiós pont, ha ott f konvexitást vált, azaz $\exists \epsilon > 0$, hogy f az $(x_0 - \epsilon, x_0)$ intervallumon konvex és az $(x_0, x_0 + \epsilon)$ intervallumon konkáv vagy fordítva.

3. Mondja ki a Newton-Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha F folytonos az $[a, b]$ intervallumon, differenciálható (a, b)-n, deriváltja ott f és f integrálható $[a, b]$-n, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Definiálja az egyenletes konvergencia fogalmát és adjon példát a $[0, 1]$ intervallumon konvergens, de ott nem egyenletesen konvergens függvénysorra.

   Megoldás. Egy f_n függvénysorozat a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és határértéke ott f, ha $\forall \epsilon \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall x \forall n \geq N_0 : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$. Például $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$.

5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

6. Mit jelent az, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontban folytonos?

   Megoldás. f folytonos (x_0, y_0)-ban, ha $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}| < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$

7. Ismertesse a vektormezők vonalmenti integráljának kiszámítási módját.

   Megoldás. Ha $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható és $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folytonos, akkor a $\mathbf{v}$ vektormező integrálja az $\mathbf{r}$ görbe mentén $I = \int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t$.

8. Definiálja a skalármező fogalmát.

   Megoldás. Skalármezőnek az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket nevezzük.

9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

   Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$ teljesül.

10. Ismertesse a lineáris differenciálegyenletek hatványsorokkal való megoldásának menetét.

    Megoldás. Legyen a kezdeti feltétel x_0-ban adott, ekkor a megoldást x_0 körüli hatványsor alakban keressük. A hatványsort tagonként deriválhatjuk, a deriváltakat behelyettesítjük az egyenletbe. Ha az együtthatófüggvények x_0-ban analitikusak, akkor a Taylor-sorukkal helyettesítjük, majd kiszámítjuk a Cauchy-szorzatokat. Ezután $(x - x_0)$ hatványai szerint haladva összehasonlítjuk az együtthatókat, ebből a hatványsor együtthatóira rekurzív összefüggést kapunk. A kezdeti feltétel az első néhány együtthatót rögzíti, a többit a rekurzió határozza meg.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi integrál értékét, ha $k \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^\infty x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Legyen $I_k = \displaystyle\int_0^\infty x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x$, ekkor $k \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^\infty x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\left[-x^k e^{-x}\right]_0^b - \int_0^b k x^{k-1}(-1)e^{-x}\,\mathrm{d}x \right) = -\lim_{b\to\infty} b^k e^{-b} + kI_{k-1} = kI_{k-1} \end{aligned}$$

A rekurzió alapján $I_k = k!I_0$, ez viszont közvetlenül számolható:

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-b} + 1 = 1$$

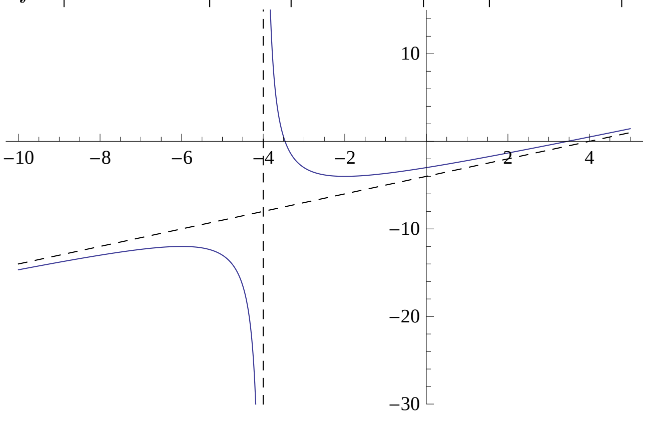
így $I_k = k!$

2. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x^2 - 12}{x+4}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. Zérushelyei $x = \pm 2\sqrt{3}$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\dfrac{1-\frac{12}{x^2}}{1+\frac{4}{x}} = \pm\infty$. Van ferde aszimptota: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-\frac{12}{x^2}}{1+\frac{4}{x}} = 1$ a meredekség és $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-4x-12}{x+4} = -4$ a tengelymetszet.

$f'(x) = \frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2}$ zérushelyei $x = -2$ és $x = -6$. $f''(x) = \frac{8}{(x+4)^3}$, ennek nincs zérushelye.

	$(-\infty,-6)$	-6	$(-6,-4)$	-4	$(-4,-2)$	-2	$(-2,\infty)$
f		max		X		min	
f'	+	0	-	X	-	0	+
f''	-	-	-	X	+	+	+



$$R_f = \mathbb{R} \setminus (f(-6), f(-2)) = \mathbb{R} \setminus (-12,-4) = (-\infty,-12] \cup [-4,\infty)$$

3. Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{2^n}$$

sor összegét. Abszolút konvergens-e a sor?

Megoldás. $\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{2^n}\right| \leq 2^{-n}$, így a majoránskritérium alapján abszolút konvergens.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 3k \ (k \in \mathbb{N}) \\ (-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{ha } n = 3k+1 \text{ vagy } n = 3k+2 \ (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Az abszolút konvergencia miatt az $n = 3k+1$ és $n = 3k+2$ részsorozatok összegeit külön számolhatjuk:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{2^n} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2^{3k+1}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2^{3k+2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^k = \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{1}{1+\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

4. Határozza meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & -18 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

Megoldás.

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -4-\lambda & 1 \\ 3 & -18 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -4-\lambda & -3-\lambda \\ 3 & -18 & -13-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)-(2\lambda-4) = -(\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2) = -(\lambda-2)(\lambda^2+1)\end{aligned}$$

Ennek gyökei $\lambda = 2$ és $\lambda = \pm i$. Mivel minden sajátérték (algebrai) multiplicitása 1, létezik sajátvektorokból álló bázis.

A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & -18 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

így $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ többszörösei a sajátvektorok.

$\lambda = i$:

$$\begin{bmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ 1 & -4-i & 1 \\ 3 & -18 & 5-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4-i & 1 \\ 1-i & 1 & -1 \\ 3 & -18 & 5-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4-i & 1 \\ 0 & 6-3i & -2+i \\ 0 & -6+3i & 2-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4-i & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

így $\begin{bmatrix} 1+i & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ többszörösei a sajátvektorok.

Mivel a mátrix elemei valósak, a $\lambda = -i$-hez tartozó sajátvektorok ezek konjugáltjai lesznek, azaz $\begin{bmatrix} 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(u,v) = v\cos u\mathbf{i} + v\sin u\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k}$ felület $0 \le u \le 4\pi$, $0 \le v \le 4$ darabjának felszínét.

Megoldás.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-v\sin u\mathbf{i} + v\cos u\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\cos u\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j} - \mathbf{k}) = (-v\cos u - \sin u)\mathbf{i} + (\cos u - v\sin u)\mathbf{j} - v\mathbf{k}$$

$$A = \int_0^4 \int_0^{4\pi} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^4 \int_0^{4\pi} \sqrt{1+2v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 4\pi \int_0^4 \sqrt{1+(\sqrt{2}v)^2}\,\mathrm{d}v$$

$\sinh t = \sqrt{2}v$, $\cosh t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}v$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}A &= 4\pi\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\operatorname{arsh} 4\sqrt{2}} \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\pi \int_0^{\operatorname{arsh} 4\sqrt{2}} 1+\cosh 2t\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\pi\left[t + \frac{\sinh 2t}{2}\right]_0^{\operatorname{arsh} 4\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi \operatorname{arsh} 4\sqrt{2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sinh 2\operatorname{arsh} 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

6. Integrálja az $f(x,y,z) = z^2$ skalármezőt az $x^2+y^2+z^4 \le 1$ tartományon.

Megoldás. Hengerkoordinátákkal $\mathbf{r}(r,\phi,z) = r\cos\phi\mathbf{i} + r\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a Jacobi-determináns r, az integrálási tartomány $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$, $-\sqrt[4]{1-r^2} \le z \le \sqrt[4]{1-r^2}$, tehát

$$\iiint f\,\mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt[4]{1-r^2}}^{\sqrt[4]{1-r^2}} z^2 r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}\int_0^1 r(1-r^2)^{3/4}\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}\left[-\frac{2}{7}(1-r^2)^{7/4}\right]_0^1 = \frac{8\pi}{21}$$

7. Oldja meg az $y'' + 2y' + y = x^2$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. A homogén egyenlet $y'' + 2y' + y = 0$, karakterisztikus polinomja $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, tehát $\lambda = -1$ kétszeres gyök (belső rezonancia). A homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$. Az inhomogén tag polinom(szor exponenciális, de a kitevő $0x$), nincsen külső rezonancia, így az inhomogén egyenlet egy megoldását $A + Bx + Cx^2$ alakban keressük. Ezt behelyettesítve

$$x^2 = 2C + 2(B + 2Cx) + (A + Bx + Cx^2) = Cx^2 + (B + 4C)x + (A + 2B + 2C)$$

adódik, ebből $C = 1$, $B = -4$, $A = 6$. Az általános megoldás így $y(x) = x^2 - 4x + 6 + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$, $y'(0) = 2x - 4 - Ae^{-x} + Be^{-x} - Bxe^{-x}$. A kezdeti feltétel

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = 6 + A \\ 0 &= y'(0) = -4 - A + B \end{aligned}$$

tehát $A = -6$, $B = -2$. A keresett megoldás: $y(x) = x^2 - 4x + 6 - 6e^{-x} - 2xe^{-x}$