Matematika A3 szigorlat – 2016. június 21.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Adja meg a vektoriális szorzat geometriai definícióját és koordinátákkal adott vektorok vektoriális szorzatának kiszámítási módját.
2. Mikor mondjuk, hogy az f függvénynek x_0 inflexiós pontja?
3. Mondja ki a Newton-Leibniz-tételt.
4. Definiálja az egyenletes konvergencia fogalmát és adjon példát a $[0, 1]$ intervallumon konvergens, de ott nem egyenletesen konvergens függvénysorra.
5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.
6. Mit jelent az, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontban folytonos?
7. Ismertesse a vektormezők vonalmenti integráljának kiszámítási módját.
8. Definiálja a skalármező fogalmát.
9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?
10. Ismertesse a lineáris differenciálegyenletek hatványsorokkal való megoldásának menetét.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi integrál értékét, ha $k \in \mathbb{N}$.
$$\int_0^\infty x^k e^{-x} \, \mathrm{d}x$$
2. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x^2 - 12}{x + 4}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg a
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} n\right)}{2^n}$$
sor összegét. Abszolút konvergens-e a sor?
4. Határozza meg az
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & -18 & 5 \end{bmatrix}$$
mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?
5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(u, v) = v \cos u \mathbf{i} + v \sin u \mathbf{j} + (u - v)\mathbf{k}$ felület $0 \le u \le 4\pi$, $0 \le v \le 4$ darabjának felszínét.
6. Integrálja az $f(x, y, z) = z^2$ skalármezőt az $x^2 + y^2 + z^4 \le 1$ tartományon.
7. Oldja meg az $y'' + 2y' + y = x^2$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.