Matematika A3 szigorlat – 2016. szeptember 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Ismertesse a Cauchy-sorozat definícióját.

   Megoldás. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy, ha $\forall\epsilon > 0 \exists N_0 \forall n, m \geq N_0 : |a_n - a_m| < \epsilon$.

2. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.

   Megoldás. Ha f és g olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban és f differenciálható a $g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az x_0 pontban és $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. Mit nevezünk Leibniz-típusú sornak? Adjon példát feltételesen konvergens Leibniz-sorra.

   Megoldás. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz-típusú, ha a tagok váltakozó előjelűek és $|a_n|$ monoton csökkenően nullához tart. Például $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ feltételesen konvergens.

5. Adja meg a mátrixok rangjának három ekvivalens jellemzését.

   Megoldás. Néhány példa: oszlop/sorvektorok által kifeszített altér dimenziója, lineárisan független oszlop/sorvektorok maximális száma, maximális méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrix mérete, képtér dimenziója, lépcsős/redukált lépcsős alakban a nemnulla sorok száma.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

   Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.

   Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett irányított felület, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor $\mathbf{u}$ felületi integrálja a felületen $\iint_D \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v} \mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v))\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ módon számítható, ha $\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$ iránya a felület irányításának megfelelő, és ennek a -1-szerese, ha azzal ellentétes.

8. Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha $\mathbf{v}$ (skalár-)potenciálos vektormező, egy potenciálja U, és $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ térgörbe, akkor $\mathbf{v}$ integrálja a görbe mentén $U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a))$.

9. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.

   Megoldás. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Lipschitz-folytonos, ha létezik olyan $L > 0$ szám, amivel minden $x, x' \in \mathbb{R}$ esetén $|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$.

10. Mit nevezünk egzakt differenciálegyenletnek?

    Megoldás. Az olyan $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú egyenleteket, ahol $P = u'_x$ és $Q = u'_y$ valamely $u(x, y)$ kétváltozós függvényre. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \cos\left(\sqrt{n^2 + n \cdot \arctan n} - \sqrt{n^2+7}\right)$$
$$b_n = \left(\frac{n-2}{n-7}\right)^{2n-1}$$

Megoldás. Először a belső határértéket számoljuk ki:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2 + n \cdot \arctan n} - \sqrt{n^2+7} &= \frac{(n^2 + n\cdot \arctan n) - (n^2+7)}{\sqrt{n^2+n\cdot\arctan n} + \sqrt{n^2+7}} \\ &= \frac{n \cdot \arctan(n) - 7}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}\cdot \arctan n} + \sqrt{1+\frac{7}{n^2}}\right)} \\ &= \frac{\arctan(n) - \frac{7}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}\cdot\arctan n} + \sqrt{1+\frac{7}{n^2}}} \to \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Mivel cos folytonos, $a_n \to \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
A második sorozatnál az alap 1-hez tart, a kitevő végtelenhez, ezért $(1+1/n)^n$-re vezetjük vissza:

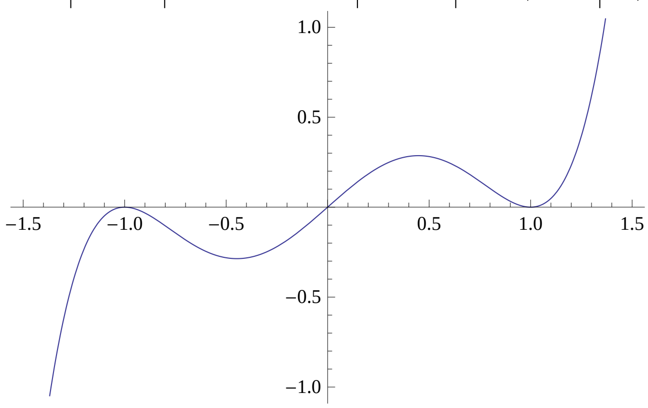
$$\left(\frac{n-2}{n-7}\right)^{2n-1} = \left[\left(1+\frac{5}{n-7}\right)^{n-7}\right]^{\frac{2n-1}{n-7}} \to e^{10},$$

hiszen a szögletes zárójelen belüli rész határértéke e^5, a külső kitevőé pedig 2.

2. Végezze el az $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, páratlan függvény, nem periodikus. $f(x) = x(x^4 - 2x^2 + 1) = x(x^2-1)^2$ alapján a zérushelyek $x = 0$ és $x = \pm 1$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$, így a folytonosság miatt $R_f = \mathbb{R}$. Nincs ferde aszimptota, mert $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$.
$f'(x) = 5x^2 - 6x^2 + 1 = (5x^2-1)(x^2-1)$ zérushelyei ± 1 és $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. $f''(x) = 20x^3 - 12x = 4x(5x^2-3)$ zérushelyei 0 és $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$. Az előjeleket elég pl. $x > 0$ mellett megnézni a szimmetria miatt.

	$(0, 1/\sqrt{5})$	$1/\sqrt{5}$	$(1/\sqrt{5}, \sqrt{3/5})$	$\sqrt{3/5}$	$(\sqrt{3/5}, 1)$	1	$(1,\infty)$
f		max		infl		min	
f'	+	0	-	-	-	0	+
f''	-	-	-	0	+	+	+



3. Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre $f(x) = (x-\pi)^2$ teljesül, ha $0 \le x \le 2\pi$. Határozza meg f Fourier-sorát. Hova konvergál a sor az $x = \frac{\pi}{2}$ pontban? Adja meg a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}$ összeget.

Megoldás. f páros, emiatt a $\sin(nx)$ tagok eltűnnek. A megmaradó együtthatókat a következő integrálokból kapjuk:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left[(x-\pi)^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2(x-\pi)\frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left[(x-\pi)^2\frac{\sin(nx)}{n} + 2(x-\pi)\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

f folytonos és szakaszonként folytonosan differenciálható, tehát a Fourier-sora minden pontban a függvényhez konvergál. Eszerint az $x = \frac{\pi}{2}$ pontban

$$\frac{\pi^2}{4} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k)^2}(-1)^k = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2},$$

amiből a keresett szumma kifejezhető: $-\frac{\pi^2}{12}$.

4. Milyen c érték esetén létezik megoldása az

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & c & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

egyenletrendszernek? Oldja meg az egyenletrendszert, ha $c = 2$.

Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt a kibővített mátrixon:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & c & 0 & -1\end{array}\right] \overset{s_1\leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ -5 & 0 & 3 & 1 & 1\\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & c & 0 & -1\end{array}\right] \overset{\substack{s_2+5s_1\\ s_3+4s_1\\ s_4+s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 5 & 3 & 1 & 11\\ 0 & 4 & 0 & 1 & 8\\ 0 & 1 & c & 0 & 1\end{array}\right] \overset{s_2\leftrightarrow s_4}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & c & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0 & 1 & 8\\ 0 & 5 & 3 & 1 & 11\end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{s_3-4s_2\\ s_4-5s_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & c & 0 & 1\\ 0 & 0 & -4c & 1 & 4\\ 0 & 0 & 3-5c & 1 & 6\end{array}\right].$$

A megjelenő törtek miatt nehézkes lenne tovább számolni, helyette vegyük észre, hogy a c-t nem tartalmazó oszlopok lineárisan függetlenek, hiszen az utolsó sorból az utolsó előttit kivonva ezek az oszlopok felső háromszögmátrixot alkotnak nemnulla elemekből álló főátlóval. Tehát a kibővített mátrix rangja mindig 4. Az együtthatómátrix rangja legalább 3, hiszen az említett oszlopok közül három itt található. Az első két oszlop szerint kifejtve a determinánsra $-4c-(3-5c) = c-3$ adódik, tehát $c \neq 3$ esetén ez a rang is 4, tehát létezik (méghozzá egyértelmű) megoldás. Ha viszont $c = 3$, akkor a rang kisebb, tehát nem létezik megoldás.

$c = 2$ helyettesítés után végezzünk további sorműveleteket:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -8 & 1 & 4\\ 0 & 0 & -7 & 1 & 6\end{array}\right] \overset{-1\cdot s_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 8 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -7 & 1 & 6\end{array}\right] \overset{s_3+s_4}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -7 & 1 & 6\end{array}\right] \overset{s_4+7s_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 20\end{array}\right].$$

Most visszafelé haladva leolvashatjuk a megoldást: $x_4 = 20$, $x_3 = 2$, $x_2 = -3$, $x_1 = 5$.

5. Egy tömör tórusz középköre az $x-y$-síkban fekszik, középpontja az origó, sugara R, a keresztmetszet sugara $r < R$. Hol van az $x \geq 0$ félsíkba eső rész tömegközéppontja?

Megoldás. A megadott testnek az $y = 0$ és a $z = 0$ sík is szimmetriasíkja, emiatt a tömegközéppont az x tengelyen van. A tórusz egy paraméterezése

$$\mathbf{r}(\rho,\vartheta,\varphi) = (R+\rho\sin\vartheta)\cos\varphi\mathbf{i} + (R+\rho\sin\vartheta)\sin\varphi\mathbf{j} + \rho\cos\vartheta\mathbf{k},$$

a kérdéses tóruszfélnek megfelelő paramétertartomány: $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. A Jacobi-determináns

$$\begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \rho\cos\vartheta\cos\varphi & -(R+\rho\sin\vartheta)\sin\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi & \rho\cos\vartheta\sin\varphi & (R+\rho\sin\vartheta)\cos\varphi\\ \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0\end{vmatrix} = \rho(R+\rho\sin\vartheta).$$

A tömegközéppont x koordinátájának meghatározásához az x irányú elsőrendű nyomatékot kell elosztani a térfogattal. Mindkettő hármas integrállal számítható:

$$x_{\mathrm{tk}} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^r (R+\rho\sin\vartheta)\cos\varphi\rho(R+\rho\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi}{\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho(R+\rho\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi}$$

$$= \frac{\displaystyle 2\int_0^{2\pi}\int_0^r (R^2\rho+2R\rho^2\sin\vartheta+\rho^3\sin^2\vartheta)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta}{\displaystyle \pi\int_0^{2\pi}\int_0^r (R\rho+\rho^2\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta}$$

$$= \frac{\displaystyle 4\pi\int_0^r \left(R^2\rho+\frac{1}{2}\rho^3\right)\mathrm{d}\rho}{\displaystyle 2\pi^2\int_0^r R\rho\,\mathrm{d}\rho} = \frac{4R^2+r^2}{2\pi R}.$$

6. Oldja meg az $y'' = \sqrt{1+y'^2}$ differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet a $v = y'$ függvényre nézve elsőrendű differenciálegyenlet, $v' = \sqrt{1+v^2}$, ami szétválasztható:

   $$x + C_1 = \int 1\,\mathrm{d}x = \int \frac{v'}{\sqrt{1+v^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,\mathrm{d}v = \operatorname{arsh} v,$$

   tehát $y'(x) = \sinh(x + C_1)$. Ezt integrálva $y(x) = C_2 + \cosh(x + C_1)$ adódik, a kezdeti feltétel alapján $C_1 = 0$, $C_2 = -1$.

7. Határozza meg az $y'' + 6y' + 9y = \sin 4x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén lineáris állandó együtthatós, tehát először a homogén egyenletet oldjuk meg. Ennek karakterisztikus egyenlete $0 = \lambda^2+6\lambda+9 = (\lambda+3)^2$, tehát -3 kétszeres gyök, belső rezonancia van. A homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}$.
   Az inhomogén tag trigonometrikus, amivel úgy járunk el mint képzetes kitevőjű exponenciális függvénnyel. Az exponensben $\pm 4i$ van, tehát nincsen külső rezonancia, így az inhomogén egyenlet egy megoldását $y(x) = A\cos 4x + B\sin 4x$ alakban kereshetjük. Ennek deriváltjai

   $$\begin{aligned} y'(x) &= 4B\cos 4x - 4A\sin 4x \\ y''(x) &= -16A\cos 4x - 16B\sin 4x, \end{aligned}$$

   amit behelyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

   $$(-7A + 24B)\cos 4x + (-24A - 7B)\sin 4x = \sin 4x.$$

   Ez minden x esetén akkor teljesül, ha $-7A + 24B = 0$ és $-24A - 7B = 1$, amiből $A = -\frac{24}{625}$ és $B = -\frac{7}{625}$. Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

   $$y(x) = -\frac{24}{625}\cos 4x - \frac{7}{625}\sin 4x + Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}.$$