Matematika A3 első ZH — A csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok — 2016. október 25.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

1. (3×2p) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.
   a) Ha egy $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ függvény folytonos, akkor rektifikálható is.
   b) Bármely skalármező gradiensének divergenciája 0.
   c) Ha egy vektormező skalárpotenciálos, akkor bármely zárt görbén 0 az integrálja.

   Megoldás. a) Hamis. Például a Koch-görbe is megadható folytonos függvénnyel, de nem rektifikálható. Egy másik példa: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\sin\frac{1}{t}\mathbf{j} + t\cos\frac{1}{t}\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = 0$ folytonos, de szintén nem rektifikálható a $[0,1]$ intervallumon, bár minden $[\epsilon, 1]$ alakú intervallumon az, ha $0 < \epsilon < 1$.
   b) Hamis. Legyen például $f(x,y,z) = x^2$, erre $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(x,y,z) = \operatorname{div}(2x\mathbf{i}) = 2$ teljesül.
   c) Igaz. A Newton-Leibniz-tétel alapján $\operatorname{grad} f$ integrálja az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ görbén $f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$. Ha a görbe zárt, azaz a két végpont egybeesik, akkor a különbség 0.

2. (4p) Bizonyítsa be az alábbi parciálási integrálási szabályt:

$$\int_V (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}V = \int_{\partial V} f\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} - \int_V f \operatorname{div} \mathbf{u}\, \mathrm{d}V,$$

   ahol V korlátos tértartomány, ∂V a pereme kifelé mutató irányítással, f skalármező, $\mathbf{u}$ vektormező.

   Megoldás. Jelölje a szokásos módon u_x, u_y, u_z az $\mathbf{u}$ vektormező komponensfüggvényeit, ekkor

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\mathbf{u}) &= \frac{\partial(fu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(fu_y)}{\partial y} + \frac{\partial(fu_z)}{\partial z} \\
&= f\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}u_x + \frac{\partial f}{\partial y}u_y + \frac{\partial f}{\partial z}u_z \\
&= f \operatorname{div} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

   A Gauss-Osztrogradszkij-tétel és az integrál linearitása alapján az előző azonosság felhasználásával

$$\int_{\partial V} f\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div}(f\mathbf{u})\, \mathrm{d}V = \int_V f \operatorname{div} \mathbf{u}\, \mathrm{d}V + \int_V (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}V$$

   adódik, ami a bizonyítandó egyenlőség átrendezése.

3. (8p) Létezik-e skalárpotenciálja az

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathbf{j}$$

   vektormezőnek? Ha igen, határozzon meg egyet.

   Megoldás. $\mathbf{u}$ mindenhol folytonosan differenciálható, tehát a potenciál létezésének feltétele az, hogy a rotáció 0 legyen. Az utolsó komponens azonosan 0, az első kettő pedig nem függ z-től, így a rotáció első két komponense biztosan 0. A harmadik

$$(\operatorname{rot} \mathbf{u})_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} - \left(-\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\right) = 0,$$

   tehát létezik potenciál.

A tanult formula alapján

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^z 0\,\mathrm{d}\zeta + \int_0^y \frac{\eta}{\sqrt{1+x^2+\eta^2}}\,\mathrm{d}\eta + \int_0^x \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi \\
&= 0 + \sqrt{1+x^2+y^2} - \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+y^2} - 1 = \sqrt{1+x^2+y^2} - 1
\end{aligned}$$

egy potenciálfüggvény.

A Newton-Leibniz-tétel alapján máshogy is számolhatunk, például olyan görbe mentén integrálva $\mathbf{u}$-t, ami a z tengellyel párhuzamos és arra merőleges egyenesszakaszból áll. Egy egyszerű választás

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} tz\mathbf{k} & \text{ha } 0 \le t \le 1 \\ z\mathbf{k} + (t-1)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}), & \end{cases}$$

ahol $t \in [0,2]$. Az első szakaszon az integrál 0, az másodikon

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \left(\frac{(t-1)x}{\sqrt{1+(t-1)^2x^2+(t-1)^2y^2}}\mathbf{i} + \frac{(t-1)y}{\sqrt{1+(t-1)^2x^2+(t-1)^2y^2}}\mathbf{j} \right) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \int_1^2 \frac{(t-1)(x^2+y^2)}{\sqrt{1+(t-1)^2(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+x^2+y^2} - 1.
\end{aligned}$$

Vagy azt is észrevehetjük, hogy $\mathbf{u}$ szimmetrikus a z körüli forgatásokra nézve, tehát $F(\sqrt{x^2+y^2})$ alakú potenciálfüggvényre számítunk. Ennek gradiensét $\mathbf{u}$-val összevetve $F(\varrho) = \sqrt{1+\varrho^2} + C$ adódik.

4. (8p) Számítsa ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2+y^2=z^2$, $5z-4x=9$ egyenletrendszerű görbén a z tengely pozitív fele irányából nézve pozitív körüljárás szerint.

   Megoldás. A második egyenletből $z = \frac{9}{5} + \frac{4}{5}x$, ezt az elsőbe írva és átalakítva

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \frac{81}{25} + \frac{16}{25}x^2 + \frac{72}{25}x \\
9(x^2 - 8x) + 25y^2 &= 81 \\
9(x-4)^2 + 25y^2 &= 225 \\
\frac{(x-4)^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} &= 1
\end{aligned}$$

   adódik, ami egy ellipszis egyenlete. Ennek szokásos paraméterezését z fenti kifejezésével kombinálva a görbe $\mathbf{r}(t) = (4+5\cos t)\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j} + (5+4\cos t)\mathbf{k}$ paraméterezését kapjuk ($t \in [0,2\pi]$).

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}(t) &= -5\sin t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} - 4\sin t\mathbf{k} \\
\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) &= 3\sin t\mathbf{i} - (4+5\cos t)\mathbf{j} + (5+4\cos t)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

   felhasználásával az integrál

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (3\sin t\mathbf{i} - (4+5\cos t)\mathbf{j} + (5+4\cos t)\mathbf{k})\cdot(-5\sin t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} - 4\sin t\mathbf{k})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-12\cos t - 15\cos^2 t - 20\sin t - 16\cos t\sin t - 15\sin^2 t\right)\mathrm{d}t = -30\pi.
\end{aligned}$$

Mivel a görbe zárt, lehetett volna Stokes-tétellel is számolni: $\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) = -2\mathbf{k}$, tehát meggondolhatjuk, hogy az felület $z=0$ síkra vett vetületének (előjeles) területét kell -2-vel szorozni. Ha pl. azt az ellipszislapot választjuk, ami az $5z-4x=9$ síkban van, és a pereme a megadott görbe, akkor a vetület az $\frac{(x-4)^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} \le 1$ ellipszis lesz, ennek területe $5\cdot 3\cdot \pi$, tehát az integrál $-2\cdot 15\pi = -30\pi$.

5. (8p) Mennyi az $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$ térgörbe $t\in[-1,1]$ darabjának ívhossza?

   Megoldás.

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \left|\sqrt{2}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}\right| = \sqrt{2+e^{2t}+e^{-2t}} = \sqrt{2+2\cosh 2t} = \sqrt{4\cosh^2 t} = 2\cosh t$$

   felhasználásával

$$I = \int_{-1}^{1} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t = 2\int_{-1}^{1}\cosh t\,\mathrm{d}t = 2\left[\sinh t\right]_{-1}^{1} = 4\sinh 1.$$

6. (8p) Határozza meg az origó középpontú, m tömegű, igen vékony gömbhéj alakú, homogén test tehetetlenségi nyomatékát a z tengelyre nézve, ha a sugara R, vagyis az

$$f(x,y,z) = \frac{m}{4\pi R^2}(x^2+y^2)$$

   függvény felszíni integrálját a $(0,0,0)$ középpontú R sugarú gömb felszínén.

   Megoldás. Használjuk a gömbfelület szokásos paraméterezését:

$$\mathbf{r}(\vartheta,\varphi) = R(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}),$$

   ahol $(\vartheta,\varphi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$, ekkor

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right| = R^2\sin\vartheta.$$

   Az integrandus a felületen kiértékelve

$$f(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)) = \frac{m}{4\pi R^2}(R^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + R^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi) = \frac{m}{4\pi}\sin^2\vartheta,$$

   így a tehetetlenségi nyomaték

$$\begin{aligned}\int f\,\mathrm{d}S &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi))\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right|\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{m}{4\pi}\sin^2\vartheta R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\\ &= \frac{mR^2}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{mR^2}{2}\frac{4}{3} = \frac{2}{3}mR^2.\end{aligned}$$

7. (8p) Számítsa ki az

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \left(e^y + 2e^{-(2x+y)^2}\right)\mathbf{i} + e^{-(2x+y)^2}\mathbf{j} + e^{xy}\mathbf{k}$$

   vektormező integrálját az $ABCD$ négyzet oldalain ebben a sorrendben körüljárva, ha $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,0)$, $C=(1,1,0)$ és $D=(0,1,0)$.

Megoldás. Használhatjuk a Stokes-tételt, mivel a görbe zárt, ekkor nem kell a négy oldalt külön paraméterezni, helyette integrálhatunk azon az N négyzetlapon, aminek pereme $ABCD$. Számoljuk ki $\mathbf{u}$ rotációját:

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) = xe^{xy}\mathbf{i} - ye^{xy}\mathbf{j} - e^{y}\mathbf{k}.$$

A négyzet egy kényelmes paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, ahol $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$. Ekkor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k},$$

tehát a keresett integrál

$$\int_{\partial N} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_N \operatorname{rot}\mathbf{u}\,\mathrm{d}\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^1 (-e^v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = [-e^v]_0^1 = 1 - e.$$

Lehet Stokes-tétel nélkül közvetlenül is számolni, de az oldalakon külön-külön nem lehet elemi függvényekkel kifejezni az integrált. Legyen az oldalak egy-egy paraméterezése az alábbi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= t\mathbf{i} & \dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{i} \\
\mathbf{r}(t) &= \mathbf{i} + t\mathbf{j} & \dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{j} \\
\mathbf{r}(t) &= (1-t)\mathbf{i} + \mathbf{j} & \dot{\mathbf{r}}(t) &= -\mathbf{i} \\
\mathbf{r}(t) &= (1-t)\mathbf{j} & \dot{\mathbf{r}}(t) &= -\mathbf{j},
\end{aligned}$$

mindegyik esetben $t \in [0,1]$, ekkor az integrál

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 \left(1 + 2e^{-4t^2}\right) \mathrm{d}t + \int_0^1 e^{-(2+t)^2}\,\mathrm{d}t \\
+ \int_0^1 (-1)\left(e + 2e^{-(2(1-t)+1)^2}\right) \mathrm{d}t + \int_0^1 (-1)e^{-(1-t)^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

A tagokat külön-külön csak numerikusan tudjuk meghatározni, de az összeg mégis egyszerűsíthető. Legyen e^{-x^2} egy primitív függvénye F, ekkor az integrál így írható:

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = (1 + F(2) - F(0)) + (F(3) - F(2)) \\
+ (-e + F(1) - F(3)) + (F(0) - F(1)) = 1 - e.
\end{aligned}$$