Matematika A3 első ZH — A csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok — 2016. október 25.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

Gyakorlat:

Név:

Neptun:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Σ

---

1. (3×2p) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.
   a) Ha egy $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ függvény folytonos, akkor rektifikálható is.
   b) Bármely skalármező gradiensének divergenciája 0.
   c) Ha egy vektormező skalárpotenciálos, akkor bármely zárt görbén 0 az integrálja.
2. (4p) Bizonyítsa be az alábbi parciálási integrálási szabályt:
$$\int_V (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}V = \int_{\partial V} f\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} - \int_V f \operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathrm{d}V,$$
   ahol V korlátos tértartomány, ∂V a pereme kifelé mutató irányítással, f skalármező, $\mathbf{u}$ vektormező.
3. (8p) Létezik-e skalárpotenciálja az
$$\mathbf{u}(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathbf{j}$$
   vektormezőnek? Ha igen, határozzon meg egyet.
4. (8p) Számítsa ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 = z^2$, $5z - 4x = 9$ egyenletrendszerű görbén a z tengely pozitív fele irányából nézve pozitív körüljárás szerint.
5. (8p) Mennyi az $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$ térgörbe $t \in [-1,1]$ darabjának ívhossza?
6. (8p) Határozza meg az origó középpontú, m tömegű, igen vékony gömbhéj alakú, homogén test tehetetlenségi nyomatékát a z tengelyre nézve, ha a sugara R, vagyis az
$$f(x,y,z) = \frac{m}{4\pi R^2}(x^2+y^2)$$
   függvény felszíni integrálját a $(0,0,0)$ középpontú R sugarú gömb felszínén.
7. (8p) Számítsa ki az
$$\mathbf{u}(x,y,z) = \left(e^y + 2e^{-(2x+y)^2}\right)\mathbf{i} + e^{-(2x+y)^2}\mathbf{j} + e^{xy}\mathbf{k}$$
   vektormező integrálját az $ABCD$ négyzet oldalain ebben a sorrendben körüljárva, ha $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (1,1,0)$ és $D = (0,1,0)$.