Matematika A3 első ZH — B csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok — 2016. október 25.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

Gyakorlat:

Név:

Neptun:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Σ

1. (3×2p) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.
   a) Ha egy $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ függvény folytonosan differenciálható, akkor rektifikálható is.
   b) Bármely vektormező rotációjának divergenciája 0.
   c) Ha egy vektormező skalárpotenciálos, akkor bármely zárt irányított felületen 0 az integrálja.
2. (4p) Bizonyítsa be az alábbi parciálási integrálási szabályt:
$$\int_\gamma f\,\mathrm{grad}(g) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b))g(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))g(\mathbf{r}(a)) - \int_\gamma g\,\mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r},$$
ahol $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ a γ görbe egy folytonosan differenciálható paraméterezése, f és g pedig skalármezők.
3. (8p) Számítsa ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = (-3x^2z-2xz^3+2y^2z^3)\mathbf{i}+(4xyz^3)\mathbf{j}+(-x^3-3x^2z^2+6xy^2z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az
$$\mathbf{r}(t) = \left(2 + t^2 - t - \frac{2}{1 + t}\right)\mathbf{i} + \frac{\sqrt{t} - 2t^3}{1 - t(1 - t)}\mathbf{j} + (\cos(\pi t) - 1)\,\mathbf{k}$$
görbe mentén a $t = 0$ és $t = 1$ paraméterértékek közötti darabon.
4. (8p) Hol van a tömegközéppontja annak a vékony, homogén tömegeloszlású drótnak, amelynek alakját a $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cosh t\mathbf{k}$ görbe $-\pi \le t \le \pi$ darabja írja le.
5. (8p) Mekkora a felszíne az $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$ felület $1 \le u^2 + v^2 \le 4$, $v > 0$ paramétertartománynak megfelelő darabjának?
6. (8p) Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ vektormezőt az origó középpontú, $z = 0$ síkba eső R sugarú középkörű, r sugarú kör keresztmetszetű tóruszfelület $x \ge 0$ darabján kifelé (a középkörtől távolodó irányba) mutató irányítás mellett.
7. (8p) Gauss-tétel segítségével számítsa ki a $\mathbf{v}(x, y, z) = x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ egyenletű felületen befelé mutató irányítás mellett.