Matematika A3 első ZH — MINTA csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok — 2016. október

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

1. (3×2p) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.
   a) Ha egy $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ függvény Lipschitz-folytonos, akkor differenciálható is.
   b) Ha egy vektormező skalárpotenciálos, akkor bármely zárt irányított felületen 0 az integrálja.
   c) Vektormező görbementi integráljánál a görbe megfordításakor az integrál ellentettjére változik.

   Megoldás. a) Hamis. Például $\mathbf{r}(t) = |t - 1/2|\mathbf{i}$ nem differenciálható a $t = 1/2$ pontban, de Lipschitz-folytonos, mert szakaszonként folytonosan differenciálható és korlátos zárt intervallumon értelmezett ($L = 1$ Lipschitz-konstans választható).
   b) Hamis. Skalárpotenciálos vektormező integrálja zárt görbén 0, míg a vektorpotenciálos vektormezők integrálja zárt irányított felületen 0.
   c) Igaz. Az integrálközelítő összegek minden tagja ellentettjére változik, így a limesz is (ha létezik).

2. (4p) Bizonyítsa be az alábbi parciális integrálási formulát, ahol f skalármező, $\mathbf{u}$ vektormező, S peremes irányított felület:

$$\int_S (f \operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_{\partial S} f\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_S (\operatorname{grad} f \times \mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

   Megoldás. A Stokes-tétel szerint

$$\int_{\partial S} f\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot}(f\mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

   teljesül. A jobb oldalon az integrandust Leibniz-szabály szerint lehet kifejteni: $\operatorname{rot}(f\mathbf{u}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{u} + f \operatorname{rot} \mathbf{u}$. Ebből átrendezéssel adódik az állítás. A felhasznált Leibniz-szabály a komponensek kiszámolásával ellenőrizhető, pl.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(f\mathbf{u})_z &= \frac{\partial(fu_y)}{\partial x} - \frac{\partial(fu_x)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}u_y + f\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}u_x - f\frac{\partial u_x}{\partial y} \\ &= (\operatorname{grad} f \times \mathbf{u})_z + f(\operatorname{rot} \mathbf{u})_z, \end{aligned}$$

   stb.

3. (8p) Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, adja meg egy potenciálját.

   Megoldás. A vektormező az egész térben értelmezett, tehát akkor potenciálos, ha a rotációja 0. A rotáció $\dfrac{\partial(x+y)}{\partial y} - \dfrac{\partial(x+z)}{\partial z} = 1 - 1 = 0$, $\dfrac{\partial(y+z)}{\partial z} - \dfrac{\partial(x+y)}{\partial x} = 1 - 1 = 0$, $\dfrac{\partial(x+z)}{\partial x} - \dfrac{\partial(y+z)}{\partial y} = 1 - 1 = 0$, tehát létezik potenciál. Egy potenciál

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,y,z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(0,\eta,z)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(0,0,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x (y+z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y z\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z 0\,\mathrm{d}\zeta \\ &= x(y+z) + zy = xy + yz + zx \end{aligned}$$

4. (8p) Mi az $\mathbf{r}(t) = (\sinh t + \cosh t)\mathbf{i} + (\cosh t - \sinh t)\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [0, \ln 2]$ intervallumon?

   Megoldás.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 \left|(\cosh t + \sinh t)\,\mathbf{i} + (\sinh t - \cosh t)\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}\right|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 2\cosh t = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

5. (8p) Számítsa ki az M tömegű, homogén tömegeloszlású, $x^2 + y^2 = R^2$, $|z| \le \frac{h}{2}$ egyenletű hengerpalást tehetetlenségi nyomatékát a koordinátatengelyekre nézve.

   Megoldás. Egy paraméterezés $\mathbf{r}(\phi, z) = R\cos\phi\mathbf{i} + R\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a paramétertartomány $(\phi, z) \in [0, 2\pi] \times [-h/2, h/2]$. Ekkor

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right| = |(-R\sin\phi\mathbf{i} + R\cos\phi\mathbf{j}) \times \mathbf{k}| = R$$

   A palást felszíne $2\pi Rh$, tehát a felületi tömegsűrűség $\mu = \frac{M}{2\pi Rh}$. A tehetetlenségi nyomatékok számolásához a koordinátafüggvények négyzeteit kell integrálni:

$$\begin{aligned} \int \mu x^2\,\mathrm{d}S &= \frac{M}{2\pi Rh}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi} R^2\cos^2\phi \cdot R\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = \frac{M}{2\pi Rh}R^3h\pi = \frac{MR^2}{2} \\ \int \mu y^2\,\mathrm{d}S &= \frac{M}{2\pi Rh}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi} R^2\sin^2\phi \cdot R\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = \frac{M}{2\pi Rh}R^3h\pi = \frac{MR^2}{2} \\ \int \mu z^2\,\mathrm{d}S &= \frac{M}{2\pi Rh}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi} z^2 \cdot R\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = \frac{M}{2\pi Rh}2\pi R\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{Mh^2}{12}. \end{aligned}$$

   Két ilyen integrál összege a harmadik tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, tehát rendre az x, y és z tengelyekre: $\frac{1}{12}M(h^2 + 6R^2)$, $\frac{1}{12}M(h^2 + 6R^2)$ és MR^2.

6. (8p) Határozza meg az $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + 2xy - xz)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$$

   vektormező integrálját az origó középpontú $R = 2$ sugarú gömb felületére kifelé mutató irányítás mellett.

   Megoldás. Használjuk a szokásos paraméterezést: $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = R(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k})$, ekkor

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = R^2\sin\vartheta(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}),$$

   ami kifelé mutat, a paramétertartomány $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) = R^2(&\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + 2\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi - \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi)\mathbf{i} \\ &- R^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\mathbf{j} - R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{k}. \end{aligned}$$

   Az integrál eszerint

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) \cdot \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= R^4\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sin^4\vartheta\cos^3\varphi + 2\sin^4\vartheta\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi \\ &\quad - \sin^4\vartheta\sin^3\varphi - \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\cos\varphi\Big)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= -\pi R^4\int_0^{\pi}\cos\vartheta\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = 0. \end{aligned}$$

7. (8p) Mennyi az $\mathbf{u}(x,y,z) = (xy+5z^2)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+(xz-y^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálja annak a tetraédernek a felületén kifelé mutató irányítás mellett, amelynek csúcsai $(1,-2,3)$, $(0,-1,1)$, $(0,-3,0)$, $(4,3,3)$?

Megoldás. Zárt felületen kell integrálni, tehát használható a Gauss-Osztrogradszkij-tétel. Eszerint a kérdéses integrál megegyezik $\operatorname{div}\mathbf{u}$ integráljával a T "tömör" tetraéderen. Egy kényelmes paraméterezéshez tekintsük az $(1,-2,3)$ csúcsból kiinduló $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ élvektorokat:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= -\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}\\
\mathbf{b} &= -\mathbf{i}-\mathbf{j}-3\mathbf{k}\\
\mathbf{c} &= 3\mathbf{i}+5\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

A paraméterezés legyen $\mathbf{r}(u,v,w) = (\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}) + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$, ahol $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1-u$, $0 \le w \le 1-u-v$. Ekkor a Jacobi-determináns $|\mathbf{abc}| = 20$.
A vektormező divergenciája:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z) &= x+3y\\
\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v,w)) &= -5+2u-4v+18w,
\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T}\mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_T \operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \int_0^1\int_0^{1-u}\int_0^{1-u-v} 20\,(-5+2u-4v+18w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\\
&= \int_0^1\int_0^{1-u}\Big(80-220u+140u^2-340v+400uv+260v^2\Big)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\\
&= \int_0^1\left(-\frac{10}{3}-20u+50u^2-\frac{80u^3}{3}\right)\mathrm{d}u\\
&= -\frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

(Lehetett volna közvetlenül is számolni az integrált, de az laponként egy kétváltozós integrál kiszámításával jár, így egyszerűbb.)