Matematika A3 második ZH — A csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok — 2016. november 22.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

Gyakorlat:

Név:

Neptun:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Σ

---

1. (3×2p) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.
   a) Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-problémának bármely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén létezik lokális megoldása.
   b) Bármely n-edrendű közönséges differenciálegyenlet megoldásai n dimenziós vektorteret alkotnak.
   c) Ha az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ függvények Wronski-determinánsa valamilyen x pontban nem 0, akkor sehol sem 0.
2. (4p) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos és a második változóban Lipschitz-folytonos, és legyenek $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet lokális megoldásai, $x_1 \in I$. Bizonyítsa be, hogy ha $y_1(x_1) < y_2(x_1)$, akkor minden $x \in I$ esetén $y_1(x) < y_2(x)$.
3. (8p) Határozza meg az $y' = 2xy$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának szukcesszív approximációjával kapott függvénysorozatot. Mi a függvénysorozat limesze?
4. (8p) Oldja meg az $x^2y' = -x^2 - xy - y^2$ differenciálegyenletet $y(1) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
5. (8p) Határozza meg az $xe^y + (x^2e^y + 2ye^{-y})y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.
6. (8p) Az
$$y' = \frac{y - x}{1 + x^2} + \cos(y - x)$$
differenciálegyenlet $y(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása $y(x) = x$. Határozza meg a megoldás kezdeti feltétel szerinti deriváltját.
7. (8p) Határozza meg az
$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 + x & 2x - x^2 \\ 1 & 1 - x \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 + x + x^2 - x^3 \\ -1 - x^2 \end{bmatrix}$$
differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását, ha a hozzá tartozó homogén rendszernek $\mathbf{y}_1(x) = (x - 1, 1)$ és $\mathbf{y}_2(x) = (x^2, x + 1)$ megoldásai.