Matematika A3 második ZH — MINTA csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok — 2016. november

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

1. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.

   a) Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-problémának bármely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén egyértelmű a lokális megoldása.

   b) Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ k-szor folytonosan differenciálható, akkor az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet megoldásai $k+1$-szer folytonosan differenciálhatóak.

   c) Bármely homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásai vektorteret alkotnak.

   Megoldás.

   a) Igaz. Ha f folytonosan differenciálható, akkor folytonos is, és a második változó szerint folytonosan differenciálható. Ekkor a második változóban Lipschitz-folytonos is, tehát a Picard-Lindelöf-tétel miatt a lokális megoldás egyértelmű.

   b) Igaz. A $k = 0$ eset az egyenlettel ekvivalens integrálegyenletből következik deriválással, a $k > 0$ eset pedig a differenciálegyenletből teljes indukcióval és a láncszabály felhasználásával ($y'(x) = f(x, y(x))$ mindkét oldalát deriválva).

   c) Igaz. Ez abból következik, hogy a komponensenkénti deriválás és az x-től függő mátrixszal szorzás is lineáris leképezések a folytonosan differenciálható vektorértékű függvények terén, a megoldáshalmaz pedig az $\mathbf{y} \mapsto (\mathbf{y}' - A(\cdot)\mathbf{y})$ lineáris leképezés magtere.

2. Bizonyítsa be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-folytonos, akkor az $y' = f(y)$ differenciálegyenlet minden $\mathbb{R}$-en értelmezett periodikus megoldása konstans.

   Megoldás. Legyen $T > 0$, és tegyük fel, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $y(x + T) = y(x)$. Válasszunk egy $x \in \mathbb{R}$ pontot. Mivel y folytonosan differenciálható, a Rolle-tétel miatt létezik $x_0 \in [x, x + T]$, amire $y'(x) = 0$. Legyen $y_0 = y(x_0)$. A differenciálegyenlet alapján $f(y_0) = 0$, tehát az $y(x) = y_0$ konstans függvény megoldás. A Picard-Lindelöf-tétel szerint viszont az $y(x_0) = y_0$ feltételt kielégítő megoldás egyértelmű, tehát az eredeti megoldás is a konstans volt.

3. Szukcesszív approximáció segítségével határozza meg az $y'(x) = x+y(x)$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását.

   Megoldás. A függvénysorozat 0. tagja $\varphi_0(x) = 1$, a továbbiakat a

$$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x (\xi + \varphi_k(\xi))\,\mathrm{d}\xi$$

   rekurzió határozza meg. Az első néhány függvény

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1 \\
\varphi_1(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} \\
\varphi_2(x) &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6} \\
\varphi_3(x) &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} \\
\varphi_4(x) &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120},
\end{aligned}$$

ebből sejthetjük, hogy

$$\varphi_k(x) = -1 - x + 2\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Valóban:

$$\begin{aligned}
1 + \int_0^x (\xi + \varphi_k(\xi))d\xi &= 1 + \int_0^x (-1 + 2\sum_{i=0}^{k} \frac{\xi^i}{i!} + \frac{\xi^{k+1}}{(k+1)!})d\xi \\
&= 1 - x + 2\sum_{i=0}^{k} \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \\
&= 1 - x + 2\sum_{i=1}^{k+1} \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \varphi_{k+1}(x).
\end{aligned}$$

A függvénysorozat mindenhol abszolút konvergens, határértéke

$$y(x) = \lim_{k\to\infty} -1 - x + 2\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = -1 - x + 2e^x$$

Ez megoldja az egyenletet:

$$(-1 - x + 2e^x)' = -1 + 2e^x = x + (-1 - x + 2e^x).$$

4. Oldja meg az $y'' = -2xy'^2$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Vezessük be a $v = y'$ jelölést, erre a függvényre nézve az egyenlet elsőrendű: $v' = -2xv^2$, ami szétválasztható. A kezdeti feltétel $v(0) = y'(0) = 1$, tehát

$$\begin{aligned}
\frac{v'}{v^2} &= -2x \\
\int_0^x \frac{v'(\xi)}{v(\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^x (-2\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
-\frac{1}{v(x)} + \frac{1}{v(0)} &= -x^2 \\
v(x) &= \frac{v(0)}{1 + v(0)x^2} = \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

   Integrálással kapjuk a megoldást:

$$y(x) = y(0) + \int_0^x v(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \arctan x.$$

5. Határozza meg az $\frac{x+y}{y} + \frac{2x+3y^2}{2y}y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Létezik csak y-tól függő multiplikátor:

$$\ln|M(y)| = \int \frac{\frac{\partial \frac{2x+3y^2}{2y}}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{x+y}{y})}{\partial y}}{\frac{x+y}{y}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln y + C,$$

   tehát $M(y) = y$, és így $x + y + (x + \frac{3}{2}y^2)y'$ egzakt. Egy potenciál

$$u(x,y) = \int_0^x (\xi + 0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \left(x + \frac{3}{2}\eta^2\right)\mathrm{d}\eta = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^3}{2}.$$

   Az általános megoldás implicit alakban $u(x, y(x)) = C$, ahol C paraméter.

6. Az

$$\begin{aligned} y_1' &= \sqrt{1+y_1^2} \\ y_2' &= (\sinh x)y_1 + y_2 - \cosh^2 x \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{y}(0) = (0,1)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása $\mathbf{y}(x) = (\sinh x, 1)$. Határozza meg a megoldás kezdeti feltétel szerinti deriváltját.

Megoldás. A deriváltmátrix kielégíti a $D' = A(x)D$ differenciálegyenletet és a $D(0) = I$ kezdeti feltételt, ahol $A(x)$ az egyenletek jobb oldalainak y_1 illetve y_2 szerinti deriváltjait tartalmazza a megadott megoldás mentén:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} & 0 \\ \sinh x & 1 \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{y_1=\sinh x \\ y_2=1}} = \begin{bmatrix} \tanh x & 0 \\ \sinh x & 1 \end{bmatrix}.$$

$D(x)$ oszlopai ugyanannak a lineáris egyenletrendszernek megoldásai, de különböző kezdeti feltétellel, tehát érdemes az általános megoldást megkeresni. Az egyenletrendszer

$$\begin{aligned} D_{1i}' &= (\tanh x)D_{1i} \\ D_{2i}' &= (\sinh x)D_{1i} + D_{2i}, \end{aligned}$$

az első egyenlet általános megoldása $D_{1i}(x) = C_1 \cosh x$, ezt a másodikba írva

$$D_{2i}' - D_{2i} = C_1 \sinh x \cosh x$$

adódik, ami egy inhomogén elsőrendű lineáris egyenlet. A homogén egyenlet megoldása e^x, az inhomogén egyenlet megoldását $c(x)e^x$ alakban írhatjuk, ahol $c'(x) = \frac{C_1 \sinh x \cosh x}{e^x} = C_1\frac{e^x}{4} - C_1\frac{e^{-3x}}{4}$, tehát $c(x) = C_1\frac{e^x}{4} + C_1\frac{e^{-3x}}{12} + C_2$.
Eddig azt láttuk be, hogy $(D_{1i}(x), D_{2i}(x)) = (C_1 \cosh x, \frac{C_1}{12}e^{-2x} + \frac{C_1}{4}e^{2x} + C_2e^x)$, ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. A kezdeti feltétel alapján az $i = 1$ komponenseknél $C_1 = 1$, $C_2 = -1/3$, míg az $i = 2$ komponenseknél $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Behelyettesítve kapjuk a deriváltmátrixot:

$$D(x) = \begin{bmatrix} D_{11}(x) & D_{12}(x) \\ D_{21}(x) & D_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh x & 0 \\ \frac{e^{-2x}}{12} + \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^x}{3} & e^x \end{bmatrix}.$$

7. Határozza meg az $y'' - y = \frac{2}{x} - 2x \ln x$ differenciálegyenlet általános megoldását ($x > 0$), ha $y_1(x) = e^x$ és $y_2(x) = e^{-x}$ megoldja a hozzá tartozó homogén egyenletet.

Megoldás. Az egyenlet másodrendű lineáris, amit elsőrendű rendszerré alakíthatunk $\mathbf{y} = (y, y')$ bevezetésével:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} - x \ln x \end{bmatrix}.$$

Legyen

$$U(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{bmatrix}$$

a megadott megoldásokból álló mátrix (nem szinguláris), ekkor $U(x)\mathbf{C}$ a homogén rendszer általános megoldása. Alkalmazzuk az állandók variálásának módszerét, az inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$, ahol

$$\begin{aligned} e^x c_1'(x) + e^{-x} c_2'(x) &= 0 \\ e^x c_1'(x) - e^{-x} c_2'(x) &= \frac{2}{x} - 2x \ln x. \end{aligned}$$

Ebből

$$
\begin{aligned}
c_1'(x) &= \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} x \ln x \\
c_2'(x) &= -\frac{e^{x}}{x} + e^{x} x \ln x.
\end{aligned}
$$

A primitív függvény mindkét esetben a második tag parciális integrálásával kapható meg, például.

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= \int \left(\frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} x \ln x \right) \mathrm{d}x \\
&= e^{-x}(1+x)\ln x + \int \left(\frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}(1+x)\frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x \\
&= e^{-x}(1+x)\ln x + \int (-e^{-x}) \,\mathrm{d}x = e^{-x}(1+x)\ln x + e^{-x} + C_1,
\end{aligned}
$$

hasonlóan

$$
c_2(x) = e^{x}(x-1)\ln x - e^{x} + C_2.
$$

Az egyenlet általános megoldása tehát $y(x) = 2x \ln x + C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$.