Matematika A3 második ZH — MINTA csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok — 2016. november

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

Gyakorlat: — Név: — Neptun:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Σ

---

1. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.
   a) Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor az $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-problémának bármely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén egyértelmű a lokális megoldása.
   b) Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ k-szor folytonosan differenciálható, akkor az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet megoldásai $k+1$-szer folytonosan differenciálhatóak.
   c) Bármely homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásai vektorteret alkotnak.
2. Bizonyítsa be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-folytonos, akkor az $y' = f(y)$ differenciálegyenlet minden $\mathbb{R}$-en értelmezett periodikus megoldása konstans.
3. Szukcesszív approximáció segítségével határozza meg az $y'(x) = x + y(x)$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását.
4. Oldja meg az $y'' = -2xy'^2$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
5. Határozza meg az $\frac{x+y}{y} + \frac{2x+3y^2}{2y} y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.
6. Az
$$y_1' = \sqrt{1 + y_1^2}$$
$$y_2' = (\sinh x) y_1 + y_2 - \cosh^2 x$$
   differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{y}(0) = (0,1)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása $\mathbf{y}(x) = (\sinh x, 1)$. Határozza meg a megoldás kezdeti feltétel szerinti deriváltját.
7. Határozza meg az $y'' - y = \frac{2}{x} - 2x \ln x$ differenciálegyenlet általános megoldását ($x > 0$), ha $y_1(x) = e^x$ és $y_2(x) = e^{-x}$ megoldja a hozzá tartozó homogén egyenletet.