1. Trigonometrikus azonosságok

1.1. Szimmetria

Az $(1,0)$ egységvektort az origó körül φ szöggel elforgatva a $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ vektorhoz jutunk. Ez a geometriai jelentés valamint a forgatások és koordinátatengelyekre illetve origóra vonatkozó tükrözések kapcsolata szemléletessé teszi az alábbi tulajdonságokat:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi + 2\pi) &= \cos\varphi \\
\sin(\varphi + 2\pi) &= \sin\varphi \\
\cos(-\varphi) &= \cos\varphi \\
\sin(-\varphi) &= -\sin\varphi \\
\cos(\varphi + \pi) &= -\cos\varphi \\
\sin(\varphi + \pi) &= -\sin\varphi \\
\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\varphi.
\end{aligned}$$

Például a $-\varphi$ és φ szögű elforgatottakat az x tengelyre vonatkozó tükrözés viszi egymásba.

1.2. Pitagorasz-tétel

Ha $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ egy derékszögű háromszög egyik szöge, az átfogó 1, akkor a két befogó $\cos\varphi$ és $\sin\varphi$, tehát a Pitagorasz-tétel szerint

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

teljesül. A szimmetriatulajdonságok alapján látható, hogy ez az összefüggés tetszőleges φ-re igaz.

1.3. Addíciós képletek

Ha az $(1,0)$ vektort $\alpha + \beta$ szöggel elforgatjuk, akkor ugyanahhoz a vektorhoz jutunk, mintha a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ vektort forgattuk volna β szöggel. Az eredményt kétféleképp kiszámítva kapjuk az addíciós képleteket.

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Az utóbbi kettő az $\alpha = \beta$ speciális eset.

1.4. Linearizáló formulák

A kétszeres szögekre vonatkozó kifejezések és a Pitagorasz-tétel alkalmazásával láthatjuk be az alábbiakat:

$$\begin{aligned}
\cos^2\varphi &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \\
\sin^2\varphi &= \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}.
\end{aligned}$$

1.5. Trigonometrikus függvények szorzata

Az addíciós képletek átlagolásából lehet legegyszerűbben megkapni az alábbi formulákat:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{-\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}\\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}\\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.
\end{aligned}$$

2. Trigonometrikus polinomok integrálása

Az $f(\cos x, \sin x)$ alakú függvényeket, ahol f kétváltozós polinom, trigonometrikus polinomoknak nevezzük. Az integrál linearitása miatt ezek integrálása visszavezethető $\cos^m x \sin^n x$ alakú függvények integrálására, ahol $m, n \in \mathbb{N}$. Erre különféle technikák léteznek, m és n paritásától függően nem mindig ugyanaz vezet leggyorsabban eredményre.

2.1. m vagy n páratlan

Ha m páratlan, akkor

$$\begin{aligned}
\cos^m x &= \left(\cos^2 x\right)^{\frac{m-1}{2}}\cos x\\
&= \left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{m-1}{2}}\cos x\\
&= \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}}\binom{\frac{m-1}{2}}{k}(-1)^k\sin^{2k}x\cos x
\end{aligned}$$

alapján az integrandus $\cos x\sin^{n+2k} x$ alakú függvények lineáris kombinációja. Ennek primitív függvénye

$$\int \cos x\sin^{n+2k} x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+2k+1} x}{n+2k+1}+C,$$

tehát

$$\int \cos^m x\sin^n x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}}\binom{\frac{m-1}{2}}{k}(-1)^k\frac{\sin^{n+2k+1} x}{n+2k+1}+C.$$

Ha n páratlan, akkor hasonlóan adódik

$$\sin^n x = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{\frac{n-1}{2}}{k}(-1)^k\cos^{2k}x\sin x,$$

amiből

$$\int \cos^m x\sin^n x\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{\frac{n-1}{2}}{k}(-1)^k\frac{\cos^{m+2k+1} x}{m+2k+1}+C.$$

Amennyiben mindkét kitevő páratlan, bármelyik azonosság használható, érdemes a kisebb kitevőjű tényezőt átalakítani, ekkor kevesebb tagból álló összeget kapunk.

2.2. m és n is páros

Ha mindkét kitevő páros, akkor a linearizáló formulákkal érhetünk célt:

$$\begin{aligned}
\cos^m x \sin^n x &= \left(\cos^2 x\right)^{m/2} \left(\sin^2 x\right)^{n/2} \\
&= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{m/2} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{n/2} \\
&= 2^{-\frac{n+m}{2}} \sum_{k=0}^{m/2} \sum_{l=0}^{n/2} (-1)^l \cos^{k+l} 2x.
\end{aligned}$$

A páratlan kitevőjű tagokat már tudjuk integrálni, a megmaradó páros kitevőket pedig újabb linearizálással alakítjuk át. A kapott kifejezésben minden kitevő legfeljebb $(m+n)/2$, tehát csak $\lfloor \log_2(m+n) \rfloor$ linearizáló lépésre lesz szükség.

3. Határozott integrál egy perióduson

Gyakran előfordul, hogy egy trigonometrikus polinom határozott integrálját kell meghatározni a $[0, 2\pi]$ intervallumon (vagy tetszőleges eltoltján). Itt is igaz, hogy elég $\cos^m x \sin^n x$ integrálját kiszámolni. Jelölje ezt $I_{m,n}$.

Ha m vagy n páratlan, akkor láttuk, hogy az integrál visszavezethető $\cos x \sin^{n+2k} x$ vagy $\cos^{m+2k} \sin x$ integrálására, ezek viszont egy perióduson eltűnnek:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos x \sin^{n+2k} x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\sin^{n+2k+1} x}{n+2k+1}\right]_{x=0}^{x=2\pi} = 0 \\
\int_0^{2\pi} \cos^{m+2k} x \sin x \,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\cos^{m+2k+1} x}{m+2k+1}\right]_{x=0}^{x=2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Ha m és n is páros, a linearizáló formula ismételt alkalmazásával is célt érhetünk, de ez kissé nehézkes. Szerencsére többféle alternatíva is kínálkozik. Parciális integrálással kaphatunk rekurzív összefüggést: ha $n > 0$, akkor

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int_0^{2\pi} \cos^m x \sin^n x \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^m x \sin x}_{f'} \underbrace{\sin^{n-1} x}_{g} \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x \sin^{n-1} x\right]_{x=0}^{x=2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{n-1}{m+1} \cos^{m+2} x \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2}.
\end{aligned}$$

Ebből teljes indukcióval

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2} = \frac{n-1}{m+1}\frac{n-3}{m+3} I_{m+4,n-4} = \cdots \\
&= \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)} I_{m+n,0} = \frac{m!n!\frac{m+n}{2}!}{\frac{m}{2}!\frac{n}{2}!(m+n)!} I_{m+n,0}
\end{aligned}$$

adódik.

Ugyanezen rekurziót felhasználva $I_{k,0}$ is meghatározható:

$$\begin{aligned}
I_{k,0} &= \int_0^{2\pi} \cos^k x \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^{k-2} x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\
&= I_{k-2,0} - I_{k-2,2} \\
&= I_{k-2,0} - \frac{1}{k-1} I_{k,0},
\end{aligned}$$

amiből átrendezéssel és teljes indukcióval

$$\begin{aligned}
I_{k,0} &= \frac{k-1}{k} I_{k-2,0} = \frac{k-1}{k}\frac{k-3}{k-2} I_{k-4,0} = \cdots \\
&= \frac{(k-1)(k-3)\cdots 1}{k(k-2)\cdots 2} I_{0,0} = \frac{k!}{2^k \left(\frac{k}{2}!\right)^2} I_{0,0}.
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $I_{0,0} = 2\pi$, a keresett integrálok értéke:

$$\int_0^{2\pi} \cos^m x \sin^n x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{ha } m \text{ vagy } n \text{ páratlan} \\ 2^{-(m+n)} \frac{m!n!}{\frac{m}{2}!\frac{n}{2}!\frac{m+n}{2}!} 2\pi & \text{ha } m \text{ és } n \text{ is páros.} \end{cases}$$

Alkalmazhatjuk a trigonometrikus függvények szorzatára vonatkozó azonosságokat is. Például $\cos^k x$ integrálja a következőképp is számolható: $\cos(ax)\cos x = \frac{1}{2}\cos(a-1)x + \frac{1}{2}\cos(a+1)x$ alapján a $\cos x$ függvénnyel való szorzás során minden tagból két újat kapunk, amelyben x együtthatója az eredetinél eggyel kisebb illetve nagyobb. A $\cos(0x) = 1$ függvényből kiindulva teljes indukcióval belátható, hogy

$$\cos^k x = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cos(i-(k-i))x,$$

ahol az i. tag azon tagok összevonásából keletkezik, ahol i-szer növekedett, $k-i$-szer csökkent x együtthatója. A jobb oldalon egy tagnak csak akkor nem 0 az integrálja, ha x együtthatója 0, tehát

$$\int_0^{2\pi} \cos^k x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ \frac{1}{2^k}\binom{k}{k/2} 2\pi & \text{ha } k \text{ páros.} \end{cases}$$

Néhány kis n, m értéknél az integrál:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \pi \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} \qquad \int_0^{2\pi} \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 x \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}.$$