Hausaufgabe - Differentialrechnung: Anwendungen

1. Logarithmische Ableitung

1. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion. (Vergessen Sie den Definitionsbereich nicht.)

   (a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$ (b) $(x^2-1)^{\mathrm{sh}x}$ (c) $(\sqrt{x})^{\mathrm{tg}\,x}$

2. Implizite Ableitung

1. Berechnen Sie die Ableitung der impliziten Funktion ($y = y(x)$) im (in den) gegebenen Punkt(en) - wenn es möglich ist. Schreiben Sie die Gleichung(en) der Tangenten auf.

   (a) $x^4 + y^4 - 2xy^2 = 4$ in $x_0 = 1$

   (b) $\sin(xy) + \ln\left(\frac{x}{y}\right) - x^2 + \pi = 0$ in $P_1\,(1;\,\pi)$, $P_2\,(\sqrt{\pi};\,\sqrt{\pi})$

3. Monotonie, Extremwert

1. Untersuchen Sie das Monotieverhalten, und führen Sie den Extremwerttest der folgeneden Funktionen durch.

   (a) $f_1(x) = \sin(x) + \cos(x)$

   (b) $f_2(x) = \mathrm{sh}^2(x)$

   (c) $f_3(x) = \sqrt{2x^3 - x^2 - 5x - 2}$

   (d) $f_4(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{(x+1)^2}$

2. Wir schneiden aus einer kreisförmigen Platte einen Kreisausschnitt aus, und wier biegen einen kegelförmigen Trichter daraus. Wie groß sei der Zentriwinkel des Kreisausschnittes um das Volumen des Kegels zu maximieren?

3. In eine Kugel mit Radius $R = 3$ dm schreiben wir einen Drehzylinder (geraden Kreiszylinder). Berechnen Sie die Höhe, bzw. Radius des Zylinders mit dem maximalen Volumen.

4. Ölpipelinen müssen verlegt werden zwischen der Ölbohrinsel und der Erdölraffinerie (die sich an der Meeresküste befindet). Die Baukosten der Unterwasser-Ölpipelines betragen 500 000 Dollar, Kosten auf dem Lande 300 000 Dollar. Die Entfernung der Ölbohrinsel von der Meeresküste is 10 km, und von der Erdölraffinerie 26 km (Luftlinie). Wie muß man die Pipeline ausbauen um die Kosten auf Minimum zu beschränken?

4. L'Hospital-Regel

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (wenn sie existieren) mit Hilfe der L'Hospital-Sätzen.

   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x}$

   (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$

   (c) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

   (d) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln 2x}{\sqrt[5]{x}}$

   (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(x) - x}{x^3}$

   (f) $\lim_{x\to \pi^+} \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

   (g) $\lim_{x\to \pi^-} \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

   (h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin(x) - \sin(2x)}{x - \sin(x)}$

5. Kurvendiskussion

1. (a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 4}$
   (b) $g_1(x) = e^{\frac{1}{x}}$
   (c) $h_1(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$
   (d) $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
   (e) $g_2(x) = \dfrac{x}{e^x}$
   (f) $h_2(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right)$