Hausaufgabe - Differentialrechnung: Grundlagen

1. Ableitung mit der Definition

1. Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen in dem angegebenen Punkt x_0 mit Hilfe der Definition. An welchen reellen Stellen ist die Funktion differenzierbar?

   (a) $f(x) = x^5$ und $x_0 = 1$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ und $x_0 = -1$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ und $x_0 = 2$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ und $x_0 = 9$

2. Für welchen Wert des Parametes (a, oder b) wird die Funktion im kritischen Punkt differenzierbar sein? (Arbeiten Sie mit der Definition der Differenzierbarkeit an einer x_0 Stelle. Vergessen Sie nicht, dass die Funktion muss in diesem Punkt auch stetig sein!)

   (a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \geqq 0 \\ ax+b & x < 0 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \geqq 1 \\ ax+b & x < 1 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \geqq 3 \\ ax^3 & x < 3 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \geqq 0 \\ ax^2+bx & x < 0 \end{cases}$

2. Ableitung der Umkehrfunktion

1. Berechnen Sie die Ableitungsfuntion der folgenden Umkehrfunktionen. Auf welchem Bereich sind die Funktionen differenzierbar?

   (a) $f(x) = 2^x$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

   (c) $f(x) = \arcsin x$

   (d) $f(x) = \text{arctg } x$

3. Rechenregeln

1. Berechnen Sie Ableitungen mit Hilfe der Rechenregeln: Ableitung des Skalarfachen (Faktorregel), Ableitung der Summe (Summenregel), Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel.

   (a) $f_1(x) = -x^7 + \dfrac{x^5}{8} + x^2 - 10x + 3$

   (b) $f_2(x) = 2e^x - 18\sin(x) + \log_2(x) + \sqrt[3]{x}$

   (c) $f_3(x) = \dfrac{-2}{x^2} + \dfrac{3}{x^{-3}} - \dfrac{1}{x^{0,2}}$

   (d) $f_4(x) = \sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}}$

   (e) $f_5(x) = (5x-3) \cdot \sin(x)$

   (f) $f_6(x) = 5^x \cdot \ln(x)$

   (g) $f_7(x) = \text{ctg} x$

   (h) $f_8(x) = \dfrac{\text{arcctg} x}{2 \cdot x^2}$

   (i) $f_9(x) = \dfrac{x^4 - 3x + 7}{5x^2 + 3}$

   (j) $f_{10}(x) = \log_2\left(x^3 - \dfrac{1}{x}\right)$

   (k) $f_{11}(x) = \sin\left(\sqrt{x - x^2}\right)$

   (l) $f_{12}(x) = e^{x^2 - 2\cdot\cos(3x)}$

4. Tangente, Normale

1. Def. Die Gerade $g: \; y = ax + b$ ist die Normale der Funtion f im Punkt x_0, wenn g durch den Punkt $(x_0; f(x_0))$ geht, und zu der Tangenten von f in diesem Punkt orthogonal ist.

1. Zeigen Sie, dass der Anstieg der Normalen $\dfrac{-1}{f'(x_0)}$ ist, wenn $f'(x_0) \neq 0$ die Steigung der Tangenten ist.

2. Schreiben Sie die Gleichung der Tangenten und der Normalen der folgenden Funktionen in dem angegebenen Punkt auf. (Wenn sie existieren.)

   (a) $f_1 = 5x^2 + 2x - 1,\; x_0 = 2$

   (b) $f_2 = 4 \cdot \sqrt{x},\; x_0 = 9$

   (c) $f_3 = 3\sin(x),\; x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

   (d) $f_4 = 10\ln(x) + 9,\; x_0 = e$

3. In welchem Punkt (in welchen Punkten) ist die Tangente der Kurve $y = f(x)$ parallel mit der angegebenen Geraden?

   (a) $f = x^5 + 3x,\; y = 8x - 1$

   (b) $f = \ln|x|,\; y = -x - 7$

4. In welchem Punkt (in welchen Punkten) ist die Tangente der Kurve $y = f(x)$ orthogonal zu der angegebenen Geraden?

   (a) $f = 3\cos(x),\; y = \dfrac{x}{3} + 7$

   (b) $f = \ln(x),\; y = -5x - 1$