Hausaufgabe - Grenzwert, Stetigkeit von reellen Funtionen

1. Grenzwert und Stetigkeit

1. Berechnen Sie die Grenzwerte in ∞ oder $-\infty$ (falls sie existieren).

   (a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+x-2}{-2x^3-x+7}$

   (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3x^3-5x^2-2}{-2x^3-x+7}$

   (c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^3}{-2x^2+4}$

   (d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^{2x}-1}{2^x-9^x}$

   (e) $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$

   (f) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$

   (g) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{7x}$

   (h) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{1+2x^3}$

   (i) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+1}\right)^{\sqrt{x}}$

   $a)-\frac{3}{2},\;\; b)-\infty,\;\; c)-\infty,\;\; d)-1,\;\; e)\,3,\;\; f)\,0,\;\; g)\,e^7,\;\; h)+\infty,\;\; i)\,0$

2. Berechnen Sie die Grenzwerte in $x_0 \in \mathbb{R}$ (falls sie existieren). Wenn die Funktion in $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht stetig ist, bestimmen Sie den Typus der Unstetigkeitsstelle. (Mehrmals müssen Sie die halbseitigen Grenzwerte bestimmen.)

   (a) $\lim_{x\to1} \dfrac{x^3-4x^2}{x^2-x-6}$

   (b) $\lim_{x\to-2} \dfrac{x^3-4x^2}{x^2-x-6}$

   (c) $\lim_{x\to3} \dfrac{x^3-4x^2}{x^2-x-6}$

   (d) $\lim_{x\to6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

   (e) $\lim_{x\to5} \dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$

   (f) $\lim_{x\to0} \dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}$

   (g) $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

   (h) $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}10x}$

   (i) $\lim_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

   (j) $\lim_{x\to3} \dfrac{1}{1+\sqrt[3-x]{4}}$

   (k) $\lim_{x\to1} \dfrac{1}{(x-1)^6}$

   (l) $\lim_{x\to1} e^{\frac{4}{1-x}}$

   $a)\,\frac{1}{2}$, keine USS $b)$ links $-\infty$, rechts $+\infty$, Polstelle
   $c)$ links $+\infty$, rechts $-\infty$, Polstelle, $d)\,\frac{1}{4}$, behebbare USS
   $e)\,3$, behebbare USS $f)\,0$, behebbare USS
   $g)\,3$, behebbare USS $h)\,\frac{3}{10}$, behebbare USS
   $i)\,\frac{1}{6}$, behebbare USS, $j)$ links0, rechts 1, Sprungstelle
   $k)+\infty$, Polstelle, $l)$ links $+\infty$, rechts 0, dieser Typus hat keinen speziellen Namen

3. Untersuchen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen. Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen und deren Typus. Entscheiden Sie, ob man die Funktion auf $\mathbb{R}$ stetig machen kann.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{3}{2^{\frac{2}{x}} + 1}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin 3x}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 (x-3)^2}$

   (e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

   (f) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

4. Für welchen Wert des Parametes (a, oder b) wird die Funktion im kritischen Punkt (in den kritischen Punkten) stetig sein?

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 1}{2x - 2} & x < 1 \\ 3x + a & x \geqq 1 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \operatorname{tg}(x) & x < \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{ctg}(x) + b & x \geqq \frac{\pi}{4} \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x < -\pi \\ ax + b & -\pi \leqq x \leqq 3 \\ \frac{1}{x-1} & x > 3 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} -x^3 & x < -1 \\ ax^2 + b & -1 \leqq x \leqq 2 \\ 2^x & x > 2 \end{cases}$