Hausaufgabe - Integralrechnung

1. Das unbestimmte Integral

1. Integrierung von elementaren Funktionen

(a) $\int \frac{3x^4 - 2x^2 - x + 5}{x^2}\, dx$

(b) $\int e^{2x} - 3^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{x}\, dx$

(c) $\int \frac{6^x - 9^x}{3^{x+1}}\, dx$

(d) $\int \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{1}{5+5x^2}\, dx$

(e) $\int \frac{y^2}{1+y^2} + \mathrm{ch}(y)\, dy$

(f) $\int \frac{\sin(2t)}{\cos(t)} + 7\, dt$

(g) $\int \frac{-1}{\cos^2(t)} + \sqrt{t^5 \cdot \sqrt{t}}\, dt$

(h) $\int \frac{-9}{\sqrt{4-4y^2}}\, dy$

2. Integration mit Substitution Typ 1.

(a) $\int \sin\left(\frac{x}{4} + 3\right)\, dx$

(b) $\int x \cdot \sin\left(1 + x^2\right)\, dx$

(c) $\int x^2 \cdot e^{-x^3}\, dx$

(d) $\int \sqrt{6x-1}\, dx$

(e) $\int \frac{2x+3}{x^2+1}\, dx$

(f) $\int e^{-\frac{3x+5}{2}}\, dx$

(g) $\int \mathrm{ctg} x\, dx$

(h) $\int 5 \cdot \cos^5(x) \cdot \sin(x)\, dx$

(i) $\int \cos^3(x) \cdot \sin^3(x)\, dx$

(j) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \mathrm{tg}(x)}}{\cos^2(x)}\, dx$

(k) $\int 8^{\mathrm{ctg}(x)} \cdot \frac{2}{\sin^2(x)}\, dx$

(l) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x^2+4x+1}}\, dx$

(m) $\int \frac{1}{x \cdot \ln^3(x)}\, dx$

(n) $\int \left(5x^2 - 12\right)^7 \cdot x\, dx$

3. Partielle Integration

(a) $\int (x-1) \cdot e^{3x}\, dx$

(b) $\int x^2 \cdot \ln(x)\, dx$

(c) $\int x^2 \cdot e^{-3x}\, dx$

(d) $\int \arcsin(3x)\, dx$

(e) $\int 4^x \cdot \sin(x)\, dx$

(f) $\int \left(x^2 + x - 5\right) \cdot \cos(x)\, dx$

(g) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx$

4. Integration mit Substitution Typ 2.

(a) $\int \sqrt{4+x^2}\, dx$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

(c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

(d) $\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}\, dx$

5. Integration von rationalen Bruchfunktionen

(a) $\int \frac{x^2+5}{x+2}\, dx$

(b) $\int \dfrac{2}{x^2-6x+5}\, dx$

(c) $\int \dfrac{3x-2}{x^2+4x+3}\, dx$

(d) $\int \dfrac{-2}{(x-2)\cdot(x+2)^2}\, dx$

(e) $\int \dfrac{-9}{(x+1)\cdot(x^2+1)}\, dx$

(f) $\int \dfrac{1}{x^2-x+3}\, dx$

(g) $\int \dfrac{2x+1}{x^2-x+3}\, dx$

(h) $\int \dfrac{x^3-2x^2+9x}{x^2-x+3}\, dx$

2. Bestimmtes Integral (Riemann-Integral)

1. Bestimmen Sie die Riemann-Integrale.

   (a) $\int_{x=-2}^{1} 2^x - \sqrt[3]{x} + 7\,dx$

   (b) $\int_{x=-2}^{1} 2^x - \sqrt[3]{x} + 7\,dx$

   (c) $\int_{t=0}^{\sqrt[6]{3}} \frac{t^2}{1+t^6}\,dt$

   (d) $\int_{z=-\pi/2}^{\pi} \sin^3(4z)\;dz$

   (e) $\int_{x=-\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{-7}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

   (f) $\int_{x=-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{-7}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2. Sei $f(x),\ x \in \left[0; 9\pi^2\right]$ durch die Parameterdarstellung $x = x(t) = t^2,\ y = y(t) = \sin(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ definiert.

$$\int_{x=0}^{9\pi^2} f(x)\,dx = ?$$

3. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

   (a) $\int_{x=0}^{\pi/2} \frac{4\sin(x)}{2+9\cos(x)}\,dx$

   (b) $\int_{x=-\pi/4}^{\pi/4} \frac{4\sin(x)}{2+9\cos(x)}\,dx$

4. Können wir (mit unseren bisherigen Kenntnissen, bzw. kennengelernten Methoden) das folgende Integral berechnen? Wenn nicht, warum?

$$\int_{x=0}^{3\pi/2} \frac{4\sin(x)}{2+9\cos(x)}\,dx$$

3. Flächeninhalt

1. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen $y = \dfrac{4\sin(x)}{2+9\cos(x)}$ und der $x-$Achse auf dem Intervall:

   (a) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

   (b) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

2. Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen und der $x-$Achse.

   (a) $y = -x^4 + x^3 + 6x^2$

   (b) $y = 4x^3 - 4x^2 - 24x$

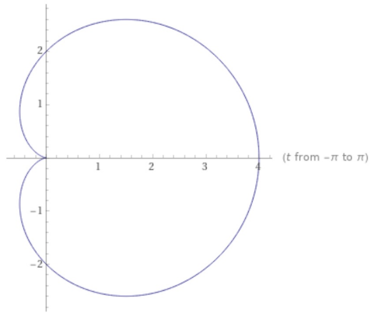
3. Berechnen Sie den Flächeninhalt des begrenzten (=endlichen), ebenen Bereiches, der durch die beiden Funktionsgraphen berandet ist.

$$y_1 = \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad y_2 = -x + 2,5$$

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt unterhalb der Zykloide:

$$x(t) = 3\,(t - \sin(t))\,,\ y(t) = 3\,(1 - \cos(t))\,,\ t \in [0; 2\pi]$$

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt von der oberen Hälfte des ebenen Bereiches, der durch die Kardioide (=Herzkurve) berandet ist:
$$x(t) = 2\cos(t)(1+\cos(t)), \; y(t) = 2\sin(t)(1+\cos(t)), \; t \in [-\pi;\pi]$$
(Diese Parameterdarstellung beschreibt die ganze Kardioidkurve!)



6. Berechnen Sie den Flächeninhalt von der oberen Hälfte des ebenen Bereiches, der durch die Kardioide (=Herzkurve) berandet ist:
$$r(\phi) = 10(1+\cos(\phi)), \; \phi \in [-\pi;\pi]$$
(Diese POLARdarstellung beschreibt die ganze Kardioidkurve! (Die natürlich ein bißchen "größer" ist, als die in der vorherigen Aufgabe.))

7. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Sektorfläche, die der Funktionsgraph $y = \ln x, \; x \in [1/e; e]$ definiert. Sie können mit x parametrisieren!

4. Bogenlänge

1. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = \sqrt{(2x+5)^3}, \; x \in [0; 2,5]$.
2. Berechnen Sie die Bogenlänge der ganzen Herzkurve
$$x(t) = 2\cos(t)(1+\cos(t)), \; y(t) = 2\sin(t)(1+\cos(t)), \; t \in [-\pi;\pi]$$
3. Berechnen Sie die Bogenlänge der Herzkurve in Polardarstellung:
$$r(\phi) = 4(1+\cos(\phi)), \; \phi \in [-\pi;\pi]$$

5. Volumen und Manteloberflächeninhalt von Drehkörpern

1. Man rotiere den Funktionsgraphen $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} \cdot \ln(x)}, \; x \in \left[e^2; e^5\right]$ um die $x-$Achse, und berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.
2. Man rotiere den Funktionsgraphen $y = \sqrt{x}, \; x \in [0; 3/4]$ um die $x-$Achse, und berechne das Volumen und den Manteloberflächeninhalt des entstehenden Rotationskörpers.
3. Man rotiere um die $x-$Achse den Funktionsgraphen der Zykloide:
$$x(t) = 2(t - \sin(t)), \; y(t) = 2(1-\cos(t)), \; t \in [0; 2\pi]$$
Man berechne das Volumen und den Manteloberflächeninhalt des entstehenden Rotationskörpers.