Hausaufgabe - Komplexe Zahlen

1. Seien $z = 3 + 2i,\ u = -1 + i,\ v = 7i,\ w = \frac{1}{2} - 8i$, man bestimme das Ergebnis der folgenden Operationen (in algebraischer Form).

   (a) $(z + u)v$

   (b) $(\overline{u - v}) - z$

   (c) $\frac{(uv)^2}{5}$

   (d) $\frac{-2u + v}{z}$

   (e) $|z - u| + w$

   (f) $v^{Im\overline{w}}$

   (g) $\frac{u^2 - v^2}{i}$

   (h) $\frac{1}{i \cdot \overline{z}}$

   (i) $\overline{\left(\frac{u - w}{v}\right)}$

   $\left(-21 + 14i;\ -4 + 4i;\ \frac{98}{5}i;\ \frac{16}{13} + \frac{11}{13}i;\ \sqrt{17} + 0,5 - 8i;\ 7^8;\ -2 - 49i;\ \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i;\ \frac{9}{7} - \frac{3}{14}i\right)$

2. Skizzen Sie den entsprechenden Bereich in den komplexen Zahlenebene auf.

   (a) $Re\ z < -1$

   (b) $1 < Im\ z \leqq 5$

   (c) $|z| < 5$

   (d) $|z - i| \geqq 5$

   (e) $|2z - 6| \leqq 4$

   (f) $Im\ z > Re\ z$

3. Schreiben Sie die komplexen Zahlen in die trigonometrische Form um.

   (a) $1 + \sqrt{3}i$

   (b) $i - 1$

   (c) $\frac{9 + 9i}{1 - i}$

   $\left(r = 2,\ \alpha = \frac{\pi}{3}\right);\ \left(r = \sqrt{2},\ \alpha = \frac{3\pi}{4}\right);\ \left(r = 9,\ \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$

4. Führen Sie die folgenden Operationen an $z = 2-i$ durch. Schreiben Sie das Ergebnis in der algebraischen oder trigonometrischen Form auf (wählen Sie die Form, die bequemer ist).

   (a) Spiegelung an der reellen Achse

   (b) Rotation (um den Ursprung) mit $\alpha = \frac{\pi}{6}$, dann Streckung auf das Fünffache

   (c) Rotation (um den Ursprung) mit $\alpha = -60°$, dann Spiegelung an der imaginären Achse

   $\left(2 + i;\ \frac{10 + 5\sqrt{3}}{2} + \frac{10\sqrt{3} - 5}{2}i;\ -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i\right)$

5. Ermitteln Sie das Ergebnis.

   (a) $\sqrt[6]{1} =$ (b) $\sqrt[5]{1-i} =$ (c) $\sqrt[3]{-8i} =$

   $\big($sechste Einheitswurzeln; $\sqrt[10]{2}$ ausheben; 2 ausheben$\big)$

6. Lösen Sie die Gleichungen in $\mathbb{C}$.

   (a) $z^2 - 4z + 4 = 0$ (b) $z^4 + 16 = 0$ (c) $i \cdot z^2 = 3i - 5i^2 - 2i^3$

   (Lösungsformel; vierte Wurzel;
   mit i dividieren, dann trigonometrische Form auf der rechten Seite, und Quadratwurzel)