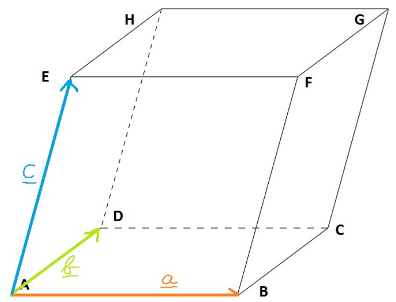
Hausaufgabe 1. Vektoralgebra, Vektorprodukte

1. Vektoralgebra, lineare Kombination, lin. Unabhängigkeit, Basis

1. Seien **a** und **b** nichtparallele Vektoren.
   Für welche $\alpha,\ \beta$ Werte gilt $\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} = (2\beta + 1) \cdot \mathbf{a} + (2 - \alpha) \cdot \mathbf{b}$?

2. Gegeben sind die Ortsvektoren von zwei benachbarten Eckpunkten und dem Symmetriemittelpunkt eines Parallelogramms. Schreiben Sie die Ortsvektoren der anderen Eckpunkten auf.

3. Gegeben sind die **a**, **b**, **c** Kantenvektoren des Spates in der folgenden Abbildung. (Nehme an, dass der Eckpunkt A der Ursprung ist.) Schreiben Sie die folgenden Vektoren mit den drei gegebenen Vektoren auf:
   $\overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{GE},\ \overrightarrow{HB},\ \overrightarrow{FC}$ und die Ortsvektoren der Mittelpunkte der Seitenflächen.



4. Für welche Werte des λ Parameters sind die Vektoren linear unabhängig bzw. abhängig?
   $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

5. Bilden die folgenden Vektoren eine Basis in $\mathbb{R}^3$?
   Ermitteln Sie die Lösung mit Hilfe der parallelen Zerlegung, und auch mit Hilfe von Vektorprodukten.
   $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -18 \end{pmatrix}$

6. Schreiben Sie die parallele Zerlegung von $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in den Richtungen $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
   $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf.

7. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, der die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $4 : 1$ teilt. $A(10;\ -4;\ 0),\ B(-3;\ 0;\ 4)$

2. Vektorprodukte - Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Spatprodukt

1. Die folgenden Vektoren sind paarweise orthogonal zu einander. Berechnen Sie die unbekannten Komponenten.
   $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \beta \\ 3 \\ \gamma \end{pmatrix}$

2. Ermitteln Sie die orthogonale Zerlegung von $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ längs $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Spiegeln Sie den Vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ an der Richtung des Vektors $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. Für welche x und z Werte ist $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ z \end{pmatrix}$ orthogonal zu $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und gleichzeitig zu $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreieckes mit den Eckpunkten $A(2;-1;2)$, $B(0;3;1)$, $C(1;1;5)$, und den Fußpunkt bzw. Länge der Höhe bezüglich des Punktes C.

6. Das Volumen des Tetraeders $ABCD$ beträgt 5 Einheiten. Drei Eckpunkte sind bekannt: $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$ und $C(2;-1;3)$. Der Eckpunkt D liegt auf der $x-$Achse. Bestimmen Sie die Koordinaten von D, und die Länge der Höhe des Tetraeders bezüglich D.