Testaufgabe 2., am 5. November 2024.

1. [4 P] Berechnen Sie die Ableitung im Punkt $x_0 = 1$ mit der **Definition**.

$$f(x) = \sqrt{x} - x$$

2. [4 P] Führen Sie einen Monotonie- und Extremwerttest durch.

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

3. [5 P] Finden Sie die Unstetigkeitsstellen der funktion, und bestimmen Sie auch den Typus.

$$\frac{\operatorname{ctg}^2(x) \cdot (x^2 + x - 2)}{x^3 - 1}$$

4. [5 P] Schreiben Sie die Gleichung der Tangenten der Funktion $y = y(x)$ im Punkt $x_0 = 4$ auf.

$$\frac{x + y}{\sqrt{x} \cdot y} - \sin(\pi \cdot x) + 16y^2 = \frac{1}{2}$$

5. [2 P] Definieren Sie die Unstetigkeitsstelle einer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion.

(1) $f(x) = \sqrt{x} - x \qquad x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - x - 0}{x - 1} \; (1p) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \; (1p) = \lim_{x \to 1} \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \; (1p) = \frac{-1}{2} \; (1p)$$

(2) $f(x) = \frac{e^x}{x} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad$ USS: $x = 0$ (1p)

$$f'(x) = (e^x \cdot x^{-1})' = e^x \cdot x^{-1} + e^x \cdot (-1) x^{-2} = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \underset{(+)}{e^x} \cdot \frac{x-1}{\underset{(+)}{x^2}} \; (1p)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

	$x<0$	0	$]0;1[$	1	$x>1$
f'	$-$	//	$-$	0	$+$
f	echt mon. fallend	//	echt mon. fallend	LOK MIN	echt mon. steigend

(1p) (1p)

$f_{min} = e$

③ $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$ USS-en: $x_0 = 1$ ~1p

$X_{1,k} = k\cdot\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\lim_{x\to 1} f(x) = ctg^2(x) \cdot \frac{x+2}{x^2+x+1} = ctg^2(1)\cdot\frac{3}{3} = \boxed{ctg^2(1)} \in \mathbb{R}$ 1p

$\Downarrow$

in $x_0=1$ behebbare Unstetigkeit 1p

$\lim_{x\to k\cdot\pi} \underbrace{ctg^2(x)}_{\downarrow\ "\frac{\oplus}{0\oplus}"\ +\infty} \cdot \underbrace{\frac{x+2}{x^2+x+1}}_{\frac{k\pi+2}{k^2\pi^2+k\pi+1} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} = \boxed{\begin{cases} +\infty & k \geq 0 \\ -\infty & k < 0 \end{cases}} \Rightarrow$ in $x_{1,k} = k\pi$ Polstellen 1p

1p

$\frac{k\pi+2}{k^2\pi^2+k\pi+1}$: $>0 \quad k>0$; $<0 \quad k<0$.

④ $\frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sin(\pi x) + 16y^2 = \frac{1}{2}$

$()'_x$

$x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-1} + x^{-\frac{1}{2}} - \sin(\pi x) + 16y^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\cdot y} - \frac{\sqrt{x}}{y^2}\cdot y' - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{3/2}} - \pi\cdot\cos(\pi x) + 32y\cdot y' = 0$ 2p

$\left(32y - \frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)\cdot y' = \pi\cdot\cos(\pi\cdot x) + \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot y}$

$x_0 = 4$

$\Downarrow$

$\frac{2}{y_0} + \cancel{\frac{1}{2}} - \underbrace{\sin 4\pi}_{=0} + 16y_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}}$

$2 + 16y_0^3 = 0$

$y_0^3 = \frac{-1}{8}$

1p $\boxed{y_0 = \frac{-1}{2}}$

$y'(x_0) = \frac{\pi\cdot\cos(\pi\cdot 4) + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}}{-16 - 8} = \frac{\frac{16\pi+1+8}{16}}{-24} = -\frac{16\pi+9}{16\cdot 24}$ 1p

Gl. r Tangenten:

$y = -\frac{16\pi+9}{16\cdot 24}\cdot(x-4) - \frac{1}{2}$ 1p