**Testaufgabe 1, am 7. Okt. 2024.**

1. [4 P] Für welche Werte der $p$, $q$ Parameter ist $\mathbf{w}$ orthogonal zu der durch $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ aufgespannten Ebene? $\mathbf{u} = (2;\ 1;\ 0)$, $\mathbf{v} = (-1;\ 3;\ 3)$, $\mathbf{w} = (-9;\ p;\ q)$.

2. [5 P] Berechnen Sie die Höhe und den Fußpunkt der Höhe des $ABC$ Dreieckes bezüglich des Eckpunktes $C$. $A = (-1;\ -1;\ 7)$, $B = (3;\ 1;\ 9)$, $C = (0;\ 0;\ 5)$.

3. [4 P] Lösen Sie die Gleichung, zeichnen Sie das Ergebnis in der komplexen Zahlebene: $x^2 \cdot \left(x^3 - 3\right) = 0$

4. [5 P] Finden Sie alle komplexe Wurzeln und faktorisieren Sie das Polynom über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. $z_1 = -1-2i$ ist eine Wurzel. Benutzen Sie auch Polynomdivision.

$$P(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 - 3z + 5$$

5. [2 P] Wann nennt man eine reelle Zahlenfolge beschränkt? Was ist das Infimum einer reellen Zahlenfolge?

1

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} +(3-0) \\ -(6-0) \\ +(6+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} \parallel \underline{w} \begin{bmatrix} -9 \\ p \\ q \end{bmatrix}$$

2p 1p

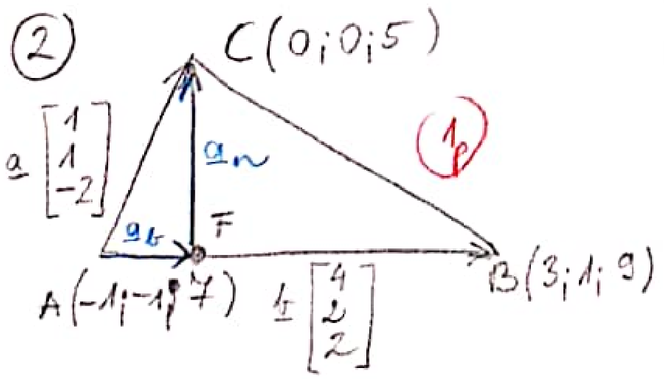
$3 \cdot (-3) = -9 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = -6 \cdot (-3) = 18$

$q = 7 \cdot (-3) = -21$

1p

2




Orthogonale Zerlegung:

$$\underline{a}_b = \frac{\langle a; b\rangle}{\langle b; b\rangle} \cdot \underline{b} = \frac{4+2-4}{16+4+4} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1

$$\underline{a}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/6 \\ 5/6 \\ -13/6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

1

$$\Rightarrow h_C = |\underline{a}_n| = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{16+25+169} = \frac{\sqrt{210}}{6} = \sqrt{\frac{70}{6}}$$

1

$$\underline{f} = \underline{v}_F = \underline{v}_A + \underline{a}_b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/6 \\ -5/6 \\ 43/6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow F\left(\frac{-4}{6}; \frac{-5}{6}; \frac{43}{6}\right)$$

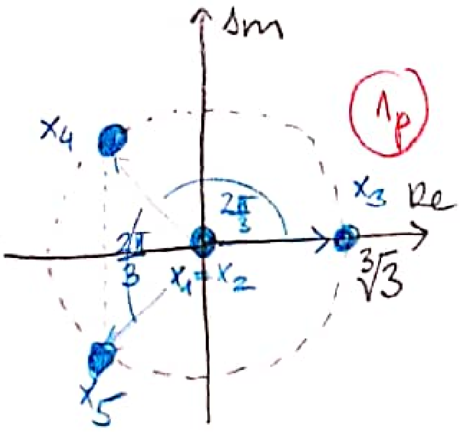
1p

③ $x^2 \cdot (x^3 - 3) = 0$

$x^2 = 0 \qquad x_1 = x_2 = 0$ 1p

ODER

$x^3 - 3 = 0 \qquad x = \sqrt[3]{3}$




$x = \sqrt[3]{3 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0)} =$

$= \sqrt[3]{3} \cdot \left(\cos \frac{0 + k2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{0 + k2\pi}{3}\right) \qquad k = 0, 1, 2$ 1p

$x_3 = \sqrt[3]{3}$

$x_4 = \sqrt[3]{3} \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{3} \cdot \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$x_5 = \sqrt[3]{3} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{3} \cdot \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$ 1p

④ $P(z) = z^4 + z^3 + 4 \cdot z^2 - 3z + 5$

$z_1 = -1 - 2i$ Wurzel

$\Downarrow$

$z_2 = -1 + 2i$ -"- auch 1p

$(z - (-1-2i))(z - (-1+2i)) = z^2 + 2z + 5$ 1p

$z^4 + z^3 + 4z^2 - 3z + 5 : z^2 + 2z + 5 = \underbrace{z^2 - z + 1}_{=0}$ 1p

$$
\begin{array}{l}
z^4 + 2z^3 + 5z^2 \\
\hline
-z^3 - z^2 - 3z \\
-z^3 - 2z^2 - 5z \\
\hline
z^2 + 2z + 5 \\
z^2 + 2z + 5 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$\Updownarrow$

$z_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$

$z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ 1p

über $\mathbb{R}$: $P(z) = (z^2 + 2z + 5)(z^2 - z + 1)$

über $\mathbb{C}$: $P(z) = (z - (-1-2i))(z - (-1+2i))\left(z - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)\left(z - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)$ 1p