Hausaufgabe - Matrizen

1. Sei $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Welche Operationen sind definiert? Berechnen Sie das Ergebnis der definierten Operationen.

   $$4\mathbf{M},\ \mathbf{v}^T\mathbf{v}\mathbf{P},\ \mathbf{MN},\ \mathbf{MP},\ \mathbf{NP}^2,\ \mathbf{NPP}^T,\ \mathbf{P}+\mathbf{N},\ \mathbf{P}-2\mathbf{N}^T,\ \mathbf{M}^{-1},\ \det\mathbf{M}.$$

2. Gegeben sind die Zeilenvektoren $\mathbf{a}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.
   Berechnen Sie die Produkte $\mathbf{ab}^T$ und $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$.

3. Zerlegen Sie die folgende Matrix auf symmetrische und schiefsymmetrische (antisymmetreische) Komponenten.

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Gegeben sind $\mathbf{v}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ und die symmetreische Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie $\mathbf{vAv}^T$

5. Gegeben sind $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
   Lösen Sie die Matrixgleichung mit Hilfe der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:

   $$\mathbf{X}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

6. Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Was ist im Produkt $\mathbf{AB}^{10}$

   (a) das Element in der ersten Zeile und dritten Spalte (a_{13}),

   (b) das Element in der zweiten Zeile und dritten Spalte (a_{23}) ?

   Warum?

7. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) (geben Sie den Rang als Funktion des reellen Parameters an)
   $\begin{pmatrix} p & 3p & p \\ p+1 & 1 & p \\ 2p & 4+p & p \end{pmatrix}$