Hausaufgabe - Lineare Gleichungssysteme

1. Lösen Sie das Gleischungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 & = & 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + x_5 & = & 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ x_3 + x_4 + 1x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left(x_1 = -\tfrac{1}{4},\ x_2 = -\tfrac{7}{12},\ x_3 = \tfrac{4}{3},\ x_4 = \tfrac{1}{2},\ x_5 = -\tfrac{5}{6}\right)$$

2. Lösen Sie das Gleischungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 + x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left(\text{einparametrische Lösung } [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T = [0\ \ -t\ 0\ t]^T\, t \in \mathbb{R}\right)$$

3. Diskutieren Sie die Lösungen abhängig von dem reellen Parameter c; begründen Sie Ihre Behauptungen mit Matrixrängen. Wenn das Gleichungssystem für $c = 0$ lösbar ist, schreiben Sie diese Lösung auf.

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x - y + 4z + cu & = & 2 \\ -x - y + 2z & = & -1 \\ 2y + z - u & = & 0 \\ x + y + z + 2u & = & 5 \end{array}\right.$$

(keine Lösung $c = 10$, eindeutige Lösung $c \neq 10$, und für $c = 0:\ x = 0,65\ y = 0,75\ z = 0,2\ u = 1,7$)

4. Diskutieren Sie die Lösungen abhängig von den reellen Parametern a und b; begründen Sie Ihre Behauptungen mit Matrixrängen. Schreiben Sie die eideutige Lösung, und auch die parametrische Lösung auf (wenn diese existieren).

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax + y - 2z & = & 0 \\ x - y + 3z & = & 4 \\ -x - y + z & = & b \end{array}\right.$$

(keine Lösung $a = 0 \wedge b \neq -4$, einparametrische Lösung $a = 0 \wedge b = -4$, eindeutige Lösung $a \neq -4...$)

5. Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x - 7y + 2z & = & -1 \\ 2x - 14y + 4z & = & -2 \\ 3x - 21y + 6z & = & -1 \end{array}\right.$$

6. Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + 5z & = & 0 \\ -x + 3y - z & = & 2 \\ x + 4y + 4z & = & 2 \end{array}\right.$$