Hausaufgabe - Lineare Abbildungen

1. Zeigen Sie, daß die folgende Zuordnung eine homogen lineare Abbildung ist, und schreiben Sie auch die Matrix der Abbildung auf.

$$\varphi : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - y \\ 2x - y + z \\ 3y + z \end{bmatrix}$$

2. Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix? Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Mutiplizität der Eigenwerte. Was sind die Eigenräume?

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\lambda_1 = 1 + \sqrt{5}, \ \lambda_2 = 1 - \sqrt{5}, \ \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{5} - 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t, \ \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{5} + 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u, \ t, u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$$

3. Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix? Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Mutiplizität der Eigenwerte. Was sind die Eigenräume?

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\left(\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \ \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot t, \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$$

4. Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix? Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Mutiplizität der Eigenwerte. Berechnen Sie die Determinante und die Inverse der Matrix.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\left(\lambda_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i, \ \lambda_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} - \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i, \ \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \cdot t, \ \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} \cdot u, \ t, u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$$

5. Was sind die Eigenwerte der folgenden Matrix? Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Mutiplizität der Eigenwerte. Existiert eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren? Ist die Matrix diagonalisierbar? Wenn ja: was ist die Diagonalform der Matrix?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\lambda_1 = -3, \ \lambda_2 = -8 + \sqrt{21}, \ \lambda_3 = -8 - \sqrt{21}\right)$$

6. Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix? Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Mutiplizität der Eigenwerte. $\det \mathbf{A} =?$, $\mathrm{Ker}\mathbf{A} =?$
   Wenn $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist: was ist das Bild der Vektoren des Eigenraumes (von $\lambda = 0$) bezüglich der homogen linearen Abbildung $\mathbf{A}$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3i,\ \lambda_3 = -3i)\,,\ \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot t,\ \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 2-6i \\ 4+3i \\ -5 \end{bmatrix} \cdot u,\ \mathbf{s}_3 = \overline{\mathbf{s}_2},\ t, u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$