5. Hausaufgabe - Geometrische Transformationen, Basiswechsel/Hauptachsensatz

1. Seien **R** die Rotation um die $y-$Achse mit Winkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$, und **P** die Projektion auf die $xz-$Ebene. $\mathbf{R},\ \mathbf{P}:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

   (a) Führen Sie die folgenden Transformationen an dem Vektor $\mathbf{v} = (-1\ 1\ 3)^T$ durch:

   - zuerst rotieren, dann projizieren
   - zuerst projizieren, dann rotieren

   (b) Ermitteln Sie die Eigenwerte und invariante Unterräume von **P**.

2. Seien **S** die Spiegelung an die $yz-$Ebene, und **W** die Projektion auf die $x = z$ winkelhalbierende Ebene. $\mathbf{S},\ \mathbf{W}:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

   (a) Führen Sie die folgenden Transformationen an dem Vektor $\mathbf{v} = (1\ 2\ 3)^T$ durch:

   - zuerst spiegeln, dann projizieren
   - zuerst projizieren, dann spiegeln

   (b) Ermitteln Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und invariante Unterräume von der Transformation wo man zuerst projiziert, dann rotiert. Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Multiplizität der Eigenwerte.

3. Schreiben Sie die kanonische Form der folgenden quadratischen Kurven auf. Wasfür Kurven sind sie geometrisch?

   (a) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$

   (b) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$