6. Hausaufgabe - Numerische Reihen

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden numerischen Reihen konvergent (oder divergent) sind. Wenn die Reihe konvergent ist, berechnen Sie den Betrag (das Ergebnis...). (Im Falle der Konvergenz sind die Reihen in dieser Aufgabe geometrische Reihen, oder ist die $N-$te Partialsumme eine Teleskopsumme.)
   Aufpassen: der Laufindex geht nicht immer von 0 oder 1 (bis ∞).

   (a)
   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^2-1}$$

   (b)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+14}{n^3+3n^2+2n}$$

   (c)
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{4^{n+1}}$$

   (d)
   $$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{250}{5^{n+2}}$$

   (e)
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{128}$$

   (f)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 7}{3^{n+1}}$$

   (g)
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + (-1)^{2n+1}}{2}$$

   (h) (+1)
   $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{7n+14}{n^2-4}$$

   Hilfe: die harmonische Reihe ist divergent.

2. Entscheiden Sie, ob die folgenden numerischen Reihen konvergent oder divergent sind, und wenn konvergent, dann absolut oder bedingt konvergent.

(a)
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-4}{n^2-1}$$
(bedingt konv.)

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot 2^n}{80^n+1}$$
(div.)

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sin n)^n}{n^n+2}$$
(absolut konv.)

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{3n+6}\right)^{2n}$$
(absolut konv.)

(e)
$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\sqrt{j^2+1}}$$
(Leibniz, bedingt konv.)

(f)
$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k^2-2}{3k^2-k-1}\right)^k$$
(pos. Reihe, absolut konv.)

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^3-n+4}$$
(pos. Reihe, div.)

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-1)}$$
(absolut konv.)

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$$
(pos. Reihe, div.)

(j)
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2(n)}$$
(pos. Reihe, absolut konv.)

(k)
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{3}}$$
(pos. Reihe, absolut konv.)

(l)
$$-0,11+0,101-0,1001+\cdots$$
(div.)

3. Approximieren Sie den Betrag (das Ergebnis...) der numerischen Reihe mit S_7, und schätzen Sie den Fehler der Approximation.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{5}{3^k+1}$$

4. Approximieren Sie den Betrag (das Ergebnis...) der numerischen Reihe mit S_N, wenn der Fehler der Approximation $h_N < 0,0001$. Bestimmen Sie den besten (kleinsten) N.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{5}{3^k+1}$$