9. Hausaufgabe - Fourier-Reihen

1. Entwickeln Sie die folgende periodische Funktion in eine Fourier-Reihe. Schreiben Sie auch die ersten vier Glieder auf. Wo ist die Reihe gleichmäßig konvergent? Wo (an welchen Stellen) stellt die Fourier-Reihe die Funktion dar? Und welchen Wert stellt die Reihe dar, wenn nicht den Funktionswert?

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad x \in [-3; 3[$
   und $f\left(x + \tilde{k} \cdot 6\right) = f\left(x\right)$ wenn $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad x \in [-L; L[\,,\ L \in \mathbb{R}^+$
   und $f\left(x + \tilde{k} \cdot 2L\right) = f\left(x\right)$ wenn $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $f(x) = \begin{cases} -x & x \in [-1; 0[\\ x & x \in [0; 1[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad x \in [-4; 4[$
   und $f\left(x + \tilde{k} \cdot 8\right) = f\left(x\right)$ wenn $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.

   (d) $f(x) = 1 - \frac{x}{2} \quad x \in [-2; 2[$
   und $f\left(x + \tilde{k} \cdot 4\right) = f\left(x\right)$ wenn $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.

   (e) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\cos x\right) \quad x \in [-\pi; \pi[$
   und $f\left(x + \tilde{k} \cdot 2\pi\right) = f\left(x\right)$ wenn $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.

   (f) $f(x) = \cos x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
   und $f\left(x + \tilde{k} \cdot \pi\right) = f\left(x\right)$ wenn $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.