Testaufgabe 1., **Muster** 2025.

1. [4 P] Berechnen Sie die Dimension des aufgespannten linearen Raumes.
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. [5 P] Diskutieren Sie die Lösbarkeit des Gleichungssystems abhängig von den reellen Parametern a und b. Begründen Sie Ihre Behauptungen mit Hilfe von Matrixrängen. Wenn das Gleichungssystem auch eine parametrische Lösung hat, schreiben Sie es auf.
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 4y - 2z &=& 2 \\ -x + 3y + az &=& 1 \\ 2x + y - z &=& b \end{array} \right.$$

3. [4 P] Gegeben sind $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
$$\det\left(\mathbf{A}^4 \cdot \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^3\right) = ?$$

4. [5 P] Schreiben Sie die kanonische Form der folgenden quadratischen Kurve auf. Wasfür Kurve ist es geometrisch?
$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$$

5. [2 P] Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung der Lösbarkeit einer inhomogenen linearen Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Hilfe von Matrixrängen.