

$$\textcircled{1} |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \overbrace{-(-4-2\lambda+6)}^{2\lambda-2} + (1-\lambda) \overbrace{(\lambda+2)(\lambda-1)+4}^{\lambda^2+\lambda+2} \\ = (1-\lambda) \cdot (-\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda + 1) = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1 \quad (3p)$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t$$

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \lambda \quad t, \lambda, \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda_3 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \omega \quad (3p)$$

$$\lambda_2 = 0, \text{Multipl. (alg. + geom.)} = 1 \Rightarrow \dim(\ker A) = 3 - 1 = 2 \quad (2p)$$

$$\textcircled{2} r(\underline{M}) = r \begin{bmatrix} p & 3p & p \\ p+1 & 1 & p \\ 2p & 4+p & p \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{z_2 - z_1 \\ z_3 - z_1}} r \begin{bmatrix} p & 3p & p \\ 1 & 1-3p & 0 \\ p & 4-2p & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{z_1 - p \cdot z_2 \\ z_3 - p \cdot z_2}} \begin{bmatrix} p & p-3p^2 & 0 \\ 1 & 1-3p & 0 \\ 0 & 4-2p & 0 \end{bmatrix} \quad (p \ p-3p^2 \ 0)$$

Zeilenvertausch

$$= r \begin{bmatrix} 0 & 2p+3p^2 & p \\ 1 & 1-3p & 0 \\ 0 & 4-3p+3p^2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\downarrow} r \begin{bmatrix} 1 & 1-3p & 0 \\ 0 & \underline{3p^2-3p+4} & 0 \\ 0 & p(3p+2) & p \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 1-3p & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & p(3p+2) & p \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2p} \begin{cases} p=0 \Leftrightarrow r(\underline{M})=2 \\ \text{sonst } r(\underline{M})=3 \text{ weil } 3p^2-3p+4 > 0 \text{ auf } \mathbb{R} \end{cases} \quad (4p)$$

Wenn $p \neq 0 \Rightarrow$ Rang ist maximal ($\underline{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $r(\underline{M})=3$)
und $\underline{M}$ ist regulär. 2p

($p=0 \Rightarrow \underline{M}$ singulär)

③ (*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{n!}$ a) alternierend ✓
 b) $\frac{(-1)^n \cdot 2}{n!} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ✓

c) Monotonie: $|a_{n+1}| \leq |a_n|$
 $\Leftrightarrow \frac{2}{(n+1)!} \leq \frac{2}{n!}$
 $\Leftrightarrow 1 \leq n+1$
 $\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}: |a_{n+1}| < |a_n| \\ \text{also (echt) mon. fallend} \end{array} \right\}$ ✓

$\Rightarrow$ (*) Leibniz-Reihe $\Rightarrow$ konvergent
Absolut konv., weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}$ konv. ist:

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 < 1$ $\nearrow$ Quotientenkrit. ✓

Wert? (*) = $2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 2(e^{-1} - 1)$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \nearrow x = -1$

$S_3 = \frac{-2}{1} + \frac{2}{2!} - \frac{2}{3!} = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$ $\wedge \quad \frac{1}{2} \leq |a_4| = \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$
 $2\left(\frac{1}{e} - 1\right) \approx -\frac{4}{3}$ mit $\nearrow$

④ $f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2}{4 - x^2} = \frac{3x^2}{4} \cdot \frac{x-2}{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{-3x^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} =$
 $= -\frac{3}{2}x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3}{2^{n+1}} \cdot x^{n+2}$

KR: $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$ KR = 2

$x = -2$ oder $x = 2 \Rightarrow \sum 1$ oder $\sum (-1)^n$ DIV.

KB: $] -2; 2[$ hier ist e Reihe abs. und gleichmäßig konv., also stellt e Funktion dar.

ODER OHNE LEIBNIZ: 4P SÖS 12.

$$(5) f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \quad B:$$

$$\text{außer: } 9 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 81 \\ \text{und } \sqrt{3x^2+3y^2} \leq z$$

$$\alpha = ? \quad \sqrt{81 - (x^2+y^2)} = \sqrt{3(x^2+y^2)}$$

$$81 = 4(x^2+y^2)$$

$$9 = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{9}{9} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\iiint_B \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot dV =$$

$$\stackrel{B}{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \vartheta \leq \alpha \\ 3 \leq r \leq 9}} \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_3^9 \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\vartheta \Rightarrow \varphi=0 \quad r=3$$

$$= \left[\varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\vartheta \right]_0^{\alpha} \cdot \left[-\cos \vartheta \right]_3^9 =$$

$$= (9-3) \cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = 6 \cdot \pi \cdot (2 - \sqrt{3})$$

$$\alpha: \text{ aus } \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z$$

$$\sqrt{3} \cdot r \cdot \sin \vartheta \leq r \cdot \cos \vartheta$$

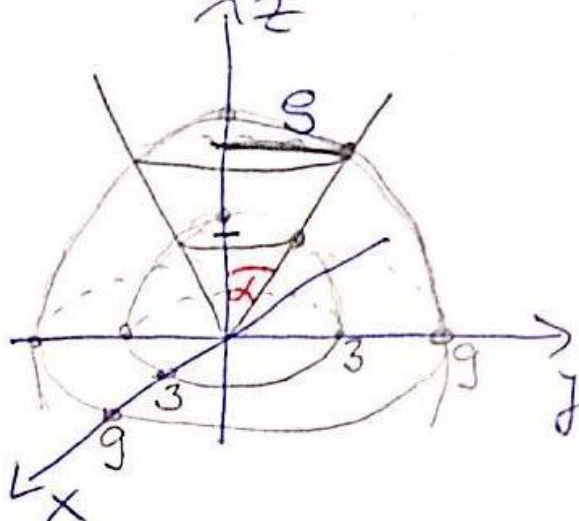
$$/ \begin{matrix} r \neq 0 \\ r=9 \end{matrix} \quad (\alpha=9)$$

$$\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$(\text{jetzt } \vartheta = \alpha \dots)$$



$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \vartheta$$

$$r \in [3; 9]$$

$$\varphi \in [0; 2\pi]$$

$$\vartheta \in [0; \alpha] = [0; \frac{\pi}{6}]$$

$$|J| = r^2 \cdot \sin \vartheta$$